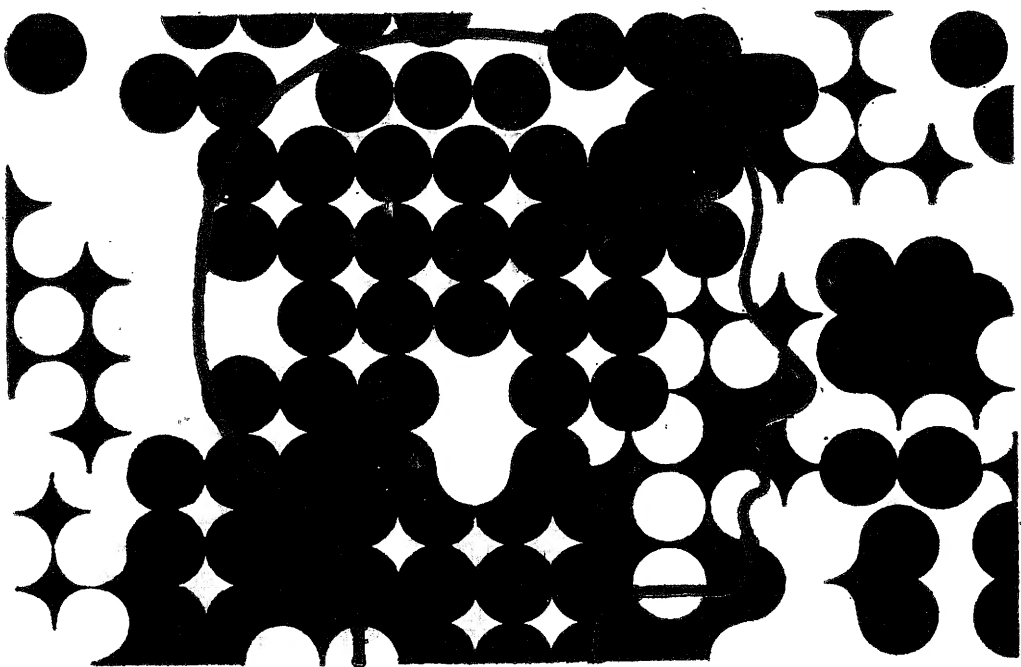


ANDRU SURDU

ELEMENTE DE LOGICĂ INTUITIONISTĂ



ALEXANDRU SURDU

**ELEMENTE
DE
LOGICĂ INTUIȚIONISTĂ**

1

CUPRINS

<i>Prefață .</i>	7
I. Teze intuiționiste fundamentale .	11
II. Formalizarea tezelor intuiționiste .	21
<i>R. Baldus, A. N. Kolmogorov, R. Wavre, P. Brouroux, F. Gonseth, M. Barzin, A. Errera, P. Lévy, S. Avsildysky, M. V. Glivenko</i>	
— Sistemul axiomatic al lui A. Heyting	35
III. Logica matematicii intuiționiste (Teoria intuitivă) .	45
a) Repere brouweriene	45
b) Entități matematice, constante și variabile	49
c) Asertarea și atestarea constantelor propoziționale	53
d) Negarea constantelor propoziționale	58
e) Constante propoziționale nedecidabile	66
f) Specificul variabilelor propoziționale intuiționiste	71
g) Semnificația operațiilor logice	76
h) Semnificația generală a teoriei intuitive	83
i) Semnificația formelor predicative	88
j) Problema cuantificării	91
IV. Teoria intuiționistă a sistemelor formale	99
a) Interpretări ale sistemului Heyting	101
1° Interpretări modale ale sistemului Σ_{Hy}	106
2° Alte interpretări ale logicii intuiționiste	111
b) Sisteme intuiționiste diferite de sistemul Heyting .	116
1° Sistemul lui Johansson	117
2° Logici fără negație	119
— Logica fără negație a lui Griss	120
— Alte sisteme fără negație	122
c) Semnificația intuiționistă a demonstrației lui Gödel	125

V. Logica formalismului neointuiționist.	130
a) Sisteme axiomatice formalist-neointuiționiste	130
b) Specificul sistemelor formalist-neointuiționiste	134
1°. Semnificația negației în sistemele Σ_{FN}	136
2°. Semnificația principiilor logice .	140
c) Sistemul deducției naturale	143
d) Modelele semantice ale lui Beth	149
e) Sistemele pozitive ale lui Gr. C. Moisil	155
<i>Încheiere</i>	159
<i>Listă de semne și prescurtări</i>	165
<i>Summary</i>	169

PREFAȚĂ

Neointuiționismul, al cărui inițiator a fost matematicianul și filozoful olandez L.E.J. Brouwer, este un curent filozofic cu puternice influențe în gândirea teoretică contemporană. Rezultatele obținute de către intuiționiști în matematica modernă, cât și poziția lor originală în fundamentele matematicilor, i-au făcut cunoscuți, încă de la începutul secolului, în lumea științifică. Ce-i drept, reacția față de acest curent nu a fost întotdeauna pozitivă. Cauza principală a acestei atitudini o constituie faptul că neointuiționismul este un curent filozofic de factură tradițională, în care se fac auzite ecouri ale principalelor tendințe din filozofia modernă: empirismul englez, raționalismul francez și dialectica germană. Ultimele, aplicate în mod consecvent la aspectele fundamentale ale științelor, ale culturii și ale vieții social-politice, i-au determinat pe intuiționiștii autentici să adopte o poziție față de antineopozitivism.

Din această cauză, neointuiționismul a pierdut mult din atenția care i se cuvenea, atât din partea savanților, cât și din partea filozofilor occidentali (în filozofia marxistă neointuiționismul este practic necunoscut). Pentru primii, după cum observă P. Lorenzen, nu prezintă nici o dificultate înțelegerea tezelor simple ale logicistilor și ale formalistilor, pe cînd intuiționismul dimpotrivă este imposibil de înțeles fără o temeinică pregătire filozofică¹. Pentru un cititor nefamiliarizat cu astfel de cunoștințe, după cum remarcă și Alfred Tarski, argumentele sînt deosebit de complicate iar unele distincții sînt de-a dreptul de neînțeles².

Adversitatea filozofilor occidentali, de orientare mai mult sau mai puțin neopozitivistă, este îndreptată în primul rînd împotriva concepțelor „metafizice”, fundamentale în filozofia intuiționistă. Acestea, ca dealtfel toate conceptele de bază ale filozofiei tradiționale, apar, în viziune neopozitivistă, drept pseudoconcepțe sau simple obscurități³.

¹ P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer-Verlag, 1969, p. 3.

² A. Tarski, *Introduction to logic*, New York, 1965, p. 235.

³ W. & M. Kneale, *The development of logic*, Oxford, 1962, p. 674.

În ciuda faptului că neointuiționismul, ca doctrină filozofică, a rămas izolat (contribuții în această direcție au adus totuși H. Weyl, G.F.C. Griss și A. Heyting), rezultatele pur matematice obținute de Brouwer și elevii săi și chiar o parte dintre ideile mai simple, referitoare la fundamentele matematicilor, au fost cunoscute, adoptate și chiar dezvoltate în mod creator⁴ (în matematica recursivă, în matematica constructivistă a lui Markov, matematica fără negație a lui Griss și matematica constructivă a lui Lorenzen).

O altă direcție intuiționistă, inaugurată de A. Heyting a devenit accesibilă, cum remarcă H. Scholz, chiar și pentru cei care în mod normal gîndesc cu totul altfel decît intuiționistii⁵. Este vorba de ceea ce se numește de obicei „logica intuiționistă”.

„Logica intuiționistă” a avut însă un destin neprevăzut. Considerînd că matematica este independentă de logică, intuiționistii autentici, de regulă matematicieni, nu i-au acordat o atenție specială. Dealtfel, însuși Heyting considera că sistemul său nu este decît o aproximare a matematicii intuiționiste, fiind în fond un sistem formalist. Dar această logică, constituind partea cea mai accesibilă și uneori singura acceptabilă (atît matematicienilor, cît și logicienilor și filozofilor de alte orientări), a sfîrșit prin a fi identificată de către aceștia cu intuiționismul însuși.

Posibilitatea acestei identificări n-a apărut însă de la început. Ea este rezultatul unui proces care a durat peste cinci decenii. Perioada inițială o constituie primele considerații formaliste asupra intuiționismului și primele încercări de formalizare. Ea se încheie cu elaborarea sistemului propus de Heyting în 1930. Străduințele logicienilor din această perioadă au fost acelea de a face „accesibil” intuiționismul, prezentîndu-l în termenii uzuali ai formalismului la modă. O a doua perioadă a fost aceea în care formalistii și-au însușit această formă a intuiționismului, încercînd mai întîi traducerea lui completă în termeni formalisti. Datorită faptului că în această direcție au lucrat personalități de prestigiu, ca K. Gödel, în unele tratate de logică matematică se obișnuiește ca „logica intuiționistă” să fie prezentată mai mult cu scopul de a fi tradusă în termeni formalisti⁶. A urmat apoi o perioadă de dezvoltare extensivă a logicii intuiționiste în noile sale veșminte formaliste. S-a ajuns, pe această linie, atît de departe încît unii autori au pus în discuție chiar legitimitatea de a mai asocia acestei logici denumirea de

⁴ Vide amănunte în B. van Rootselaar, *Intuition und Konstruktion*, Studium Generale, 3, 1966, pp. 175—181.

⁵ H. Scholz, *Esquisse d'une histoire de la logique*, Paris, 1968, p. 93.

⁶ A. N. Prior, *Formal logic*, Oxford, 1963, p. 250 sq.

„intuiționistă”⁷. În fine, în ultima perioadă au apărut chiar „intuiționiști” care au adoptat nu numai această logică formalist-neointuiționistă, ci și maniera formalistă de a o utiliza drept fundament al matematicii intuiționiste, ceea ce contrazice în mod evident însăși esența neointuiționismului. Tot Heyting a fost acela care a început lupta împotriva consecințelor formaliste ale propriei sale contribuții. Trebuie remarcat că matematicianul olandez apreciază totuși rezultatele formaliste obținute în cursul acestui proces. Ceea ce susține el este însă faptul că acestea nu au nici o importanță pentru matematica intuiționistă.

Dar, în felul acesta, s-a ajuns din nou la o situație asemănătoare celei inițiale — la postularea faptului că matematica intuiționistă este independentă nu numai de logica formalistă obișnuită, ci și de cea formalist-neointuiționistă.

Problema care rămâne deschisă este însă aceea de a construi o logică autentic-intuiționistă, adică o logică în care să fie respectat acest postulat. Dar atunci, în ce măsură va mai fi intuiționistă această logică? Soluția a fost sugerată la începutul secolului de către Brouwer. Teza că matematica intuiționistă este independentă de logică nu este încălcată prin construcția unei logici care să fie ea însăși dependentă de matematica intuiționistă. Aceasta nu înseamnă însă că logica intuiționistă, astfel construită, ar prezenta pentru matematicianul intuiționist o mai mare importanță decât logica formalist-neointuiționistă sau decât cea pur formalistă, dar nu înseamnă nici faptul că logica intuiționistă nu prezintă interes pentru filozoful intuiționist, iar, în măsura în care ea se deosebește de celelalte două, pentru logica modernă în genere.

Scopul principal al acestei lucrări este acela de a demonstra posibilitatea fundamentării unei teorii logice care să nu încalce nici una dintre principalele teze ale intuiționismului și de a marca specificul și importanța logicii a unei astfel de teorii.

În al doilea rând, deoarece autorul nu este intuiționist, va încerca să prezinte un tablou, pe cât posibil complet, fără a intra însă în amănunte, a întregii evoluții, mai mult sau mai puțin formaliste, a logicii în discuție.

În legătură cu primul obiectiv trebuie specificat faptul că au existat, în special în primele perioade amintite, unele contribuții demne de menționat. Heyting însuși încearcă în repetate rânduri să aducă completări în sensul unei dezvoltări comprehensive a propriei sale logici. Dar rezultatele obținute în această direcție sînt totuși limitate și nesiste-

⁷ A. Schmidt, *Mathematische Gesetze der Logik*, Springer-Verlag, 1960, p. 270 și p. 343.

matice. În particular, nu a fost elaborată încă nici o teorie logică intuitivă care să corespundă tuturor tezelor intuiționiste și care să fie construită ea însăși în conformitate cu acestea.

În legătură cu al doilea obiectiv există numeroase contribuții printre care trebuie amintite și cele ale matematicienilor români G.C. Moisil și Octav Onicescu. În genere, interesul pentru logica intuiționistă a fost și a rămas încă prezent în lucrările românești de specialitate, alături de interesul crescând pentru matematica intuiționistă în genere și în special pentru contribuțiile intuiționiste în fundamentele matematicilor. Recent au apărut și câteva studii asupra filozofiei intuiționiste⁸.

În ce privește interesul general pentru logica intuiționistă, trebuie spus că acesta a depășit de mult granițele matematicilor, găsindu-și aplicații și în încercările de interpretare axiomatică a fizicii teoretice⁹.

Logica intuiționistă are însă, în primul rînd, o deosebită importanță filozofică. Interpretată corect, ea este un reflex abstract al matematicii intuiționiste, al cărei obiect fundamental de studiu îl constituie „devenirea timpului”. Reflexul cel mai abstract al acestei deveniri, a „dialecticii matematice”, îl constituie respingerea intuiționistă a valabilității absolute a principiilor logice.

Dialectica, ignorată și izgonită din logică modernă de către ultimii reprezentanți ai neopozitivismului se reîntoarce și încearcă să-și ocupe locul ce i se cuvine. Și nu este lipsit de importanță faptul că, datorită intuiționiștilor, dialectica nu se reîntoarce în logică pe căi dosnice, ci pe drumul principal, atât de bătut astăzi, al sistemelor formale, pe drumul științelor moderne.

București, aprilie 1975

ALEXANDRU SURDU

⁸ Vide, Al. Surdu, *Probleme logice, formaliste și intuiționiste în filozofia greacă*, în: „Probleme de logică”, vol. VI, Buc., 1975; *Restricții intuiționiste în analiza logică a limbajului științific* în: *Epistemologia și analiza logică a limbajului științei*, Buc., 1975 și *Elemente dialectice în epistemologia intuiționistă*, *Revista de filozofie*, nr. 2, 1975.

⁹ P. Mittelstaedt, *Problemele filozofice ale fizicii moderne*, Buc. 1971, p. 230.

I. TEZE INTUIȚIONISTE FUNDAMENTALE

Intuiționismul, ca și logicismul și formalismul, în ciuda faptului că a fost legat direct de evoluția contemporană a matematicilor, are puternice rădăcini istorice. Elemente evident intuiționiste, și chiar o teorie sistematică a intuiției, se găsesc în opera lui Aristotel. Tendințele intuiționiste, raționaliste și conceptualiste în același timp, au fost preluate de către medievali și au dăinuit în diferite forme până în epoca modernă. Descartes a fost al doilea mare sistematizator al ideilor intuiționiste. Concepția lui, intuiționist-raționalistă, a determinat în mare măsură specificul filozofiei franceze, iar ecourile ei s-au menținut până în epoca contemporană, influențând direct așa-numitul *curent preintuiționist francez*. O altă sursă directă a intuiționismului contemporan a constituit-o filozofia clasică germană, în special criticismul kantian și dialectica lui Hegel. Intuiționismul, în forma lui filozofică lărgită, numită de regulă *neointuiționism*, conține și numeroase elemente idealist-subiective, provenite din filozofia engleză, în speță de la Berkeley, și elemente de filozofie indiană, preluate uneori direct, alteleori prin filiera lui Nietzsche.

Dar, istoria propriu-zisă a intuiționismului contemporan începe odată cu apariția logicismului, în forma lui rudimentară inițiată de Georg Cantor. Apariția logicismului a determinat o reacție contrară cu vădite trăsături intuiționiste (la Weierstrass, Kronecker și Hadamard).

Émile Borel a fost primul care a încercat o expunere sistematică a ideilor intuiționiste referitoare direct la matematici, iar Henri Poincaré a fost primul adversar declarat al logicismului și al formalismului în același timp.

Însă ideile savanților amintiți, chiar și atunci când erau adoptate fără rezerve, căci reprezentau în fond poziția tradițională a matematicii, erau trecute cu vederea și considerate mai degrabă comode decât eficiente, în orice caz, lipsite de spectaculozitate și neprevăzut.

Situația a fost cu totul alta în legătură cu ideile intuiționiste propriu-zise. Teza lui L.E.J. Brouwer, susținută pentru prima dată

în 1907 și întărită apoi în 1908, despre caracterul suspect al principiilor logice (*De onbetrouwbaarheid der logische principes*), a trezit de la început reacții violente și adversități. Primii adepți ai intuiționismului s-au ivit abia după 1920.

Filozofia intuiționistă a apărut în *trei* variante. Prima, cea mai importantă și cea mai complexă, este aceea a lui Brouwer. Celelalte două, a lui G. F. C. Griss și a lui A. Heyting, deși independente una de cealaltă, au ca punct de plecare tezele lui Brouwer. Datorită faptului că Griss a elaborat o logică intuiționistă oarecum independentă de propriile sale concepții filozofice, dar legată în special de contribuțiile lui Heyting, nu este necesară aici o expunere detaliată a concepției sale general-filozofice. Vor fi amintite totuși, la momentul potrivit, o parte din tezele epistemologice, legate de elaborarea așa-numitei matematici fără negație. În plus, urmărind problematica logică a intuiționismului, legată nemijlocit de contribuțiile lui Heyting, nu mai este necesară o expunere separată a ideilor sale filozofice.

În legătură cu varianta filozofică a lui Brouwer, indispensabilă oricărei considerații asupra intuiționismului în genere și deci și asupra logicii intuiționiste, trebuie menționat însă faptul că ea conține multe elemente filozofice, cum ar fi cele etice, estetice sau religioase, importante, ba chiar fundamentale pentru viziunea lui general filozofică, dar care sînt cu totul independente de logica intuiționistă. Din această cauză, vor fi expuse în continuare numai acele teze, mai mult sau mai puțin filozofice, uneori pur matematice, care au determinat apariția logicii intuiționiste și au influențat evoluția ei ulterioară. Ca punct de plecare, pentru expunerea acestor teze, poate fi abordată *problema paradoxelor logico-matematice*.

În esență, ca și Aristotel, cu referință la paradoxele eleate, și Poincaré, la cele cantorine, Brouwer consideră că paradoxele logico-matematice în genere sînt niște *erori*, a căror cauză rezidă în identificarea logicistă a matematicii cu logica. Dar acest lucru fusese deja stabilit de către Poincaré. Meritul lui Brouwer constă în aceea că, ducînd mai departe investigația, a găsit sursa acestei identificări în „confuzia dintre actul construcției matematice și limbajul matematic”¹. Numai ultimul, în ciuda specificului său, se supune mai mult sau mai puțin legilor obișnuite ale oricărui limbaj, deci legilor logice. Dar, pentru matematica efectivă nu este esențial *mijlocul de comunicare*, expresia lingvistică a rezultatului matematic, ci construcția lui mentală. Expresia lingvistică a rezultatelor matematice se dove-

¹ L. E. J. Brouwer, *Over de grondslagen der Wiskunde*, Amsterdam, 1907, p. 176.

dește uneori *gresită*, iar construcția mentală a acestor rezultate, demonstrația matematică efectivă, este un act creator al minții umane care, după cum observase deja Poincaré, poate fi exprimat lingvistic și explicitat logic numai în mod *aproximativ*. Dacă limbajul în care este exprimată construcția respectivă este contradictoriu sau nu, acest lucru este lipsit de importanță matematică. Din această cauză, consideră Brouwer, paradoxele în discuție nu sînt, ci „numai par a fi paradoxe matematice”². Dar, pe de altă parte, ele nu pot fi considerate nici paradoxe logice, deoarece nu apar în logică în genere, ci numai într-o logică, cum este cea matematică, în care *principiul terțului exclus* este considerat *absolut și universal valabil*.

Dacă matematică nu este identică cu logica și dacă atît matematica cît și logica sînt practicate *corect*, atunci apariția paradoxelor este imposibilă. O interpretare corectă a matematicii presupune, după Brouwer, o teorie matematică *anticantoriană*, iar o interpretare corectă a logicii presupune o teorie *antilogicistă*.

Punctul central al matematicii intuïtioniste, pe baza căruia pot fi infirmate tezele matematicii cantorienne, îl constituie așa-numita *teorie intuïtionistă a continuului*. Ea are două aspecte: unul legat de interpretarea *continuului liniar* și altul legat de problema admiterii unor *alte puteri decît aceea a continuului*.

Ideea generală de continuu este de natură geometrică. Încercarea de a defini continuul geometric prin numere a dus la elaborarea conceptului de *continu aritmetic*. Acesta, în accepția lui Cantor, mai are însă numeroase determinații de tip geometric, deci spațiale. Brouwer opune acestui concept continuul aritmetic *temporal*, identificat cu „*scurgerea timpului*”.

Imaginea cantoriană, spațială a continuului aritmetic a determinat o interpretare *statică* a matematicii, limitată la succesiuni de entități matematice infinite *predeterminate*, la ceva dat, care chiar dacă nu a fost cunoscut încă, ar putea fi conceput de către un eventual „Intellect Suprem”³. Problemele referitoare la aceste entități ar exista și ele în sine și ar fi gata rezolvate, urmînd să fie doar *descoperite*.

Determinațiile spațiale ale continuului aritmetic cantorian permit interpretarea succesiunilor de entități matematice drept succesiuni *actual* infinite, pe cînd determinația temporală nu permite decît o interpretare *potențial* infinită a succesiunilor de entități mate-

² L. E. J. Brouwer, *De onbetrouwbaarheid der logische principes*, retipărit în *Wiskunde, waarheid, werkelijkheid*, Groningen, 1919, p. 8.

³ Vide amănunte în E. W. Beth, *The foundations of mathematics*, Amsterdam, 1959.

matice. În termeni aristotelici, elementele continuului cantoriant sînt *concomitente*, deci *date* simultan; elementele continuului brouwerian nu pot fi decît *consecutive*, deci *urmînd* să fie date.

Dar, în ambele accepții, acest continuu, identificat de regulă cu șirul numerelor naturale, este considerat *numărabil*. Mulțimile cardinal echivalente cu șirul numerelor naturale se numesc *infiniți numărabile* sau de puterea $\aleph_0$.

Cantor admite însă și existența unor mulțimi infinite *nenumerabile*, a căror putere ar fi $\aleph_1$. Ca exemplu este dat continuul numerelor reale dintre 0 și 1, notat cu $C(0,1)$ și numit *continu linier*. Demonstrația lui Cantor, cunoscută sub numele de „metoda diagonalei”, se bazează pe faptul că în cadrul succesiunii respective de numere reale, puse în corespondență biunivocă cu numerele naturale, pot fi introduse oricînd noi numere reale. Această demonstrație nu are valoare din punct de vedere intuiționist, căci mulțimile de putere $\aleph_0$ fiind numai *potențial* infinite și numărabile admit introducerea permanentă de noi entități⁴. Deci $C(0,1)$ și orice altă mulțime infinită este, din punct de vedere intuiționist, de puterea $\aleph_0$.

Dacă nu se admite acest lucru, deci dacă se procedează cantoriant, atunci trebuie admis faptul că $\aleph_1 > \aleph_0$ sau $\aleph_1 \subset \aleph_0$, deci că există mulțimi infinite cu puteri diferite de $\aleph_0$, respectiv $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3, \dots$, care se conțin reciproc. Altfel spus, există mulțimi de mulțimi infinite și în ultimă instanță o *mulțime a tuturor mulțimilor*. Este însă evident că neadmiterea conceptului de „mulțime a tuturor mulțimilor”, înseamnă implicit imposibilitatea apariției paradoxelor și totodată imposibilitatea transcrierii logiciste a entităților matematice și deci a identității dintre matematică și logică. Altfel spus, dacă matematica este interpretată corect (*id est* în manieră intuiționistă), atunci paradoxele nu mai au nici un sens.

Teoria intuiționistă a continuului se bazează pe teoria generală a *infinițului potențial*. O mulțime este considerată infinită, dacă una dintre submulțimile ei are aceeași putere cu ea, respectiv $\aleph_0$. Oricîte mulțimi ar conține o mulțime infinită, ea nu va avea o putere mai mare decît $\aleph_0$. O ipotetică mulțime a tuturor mulțimilor, indiferent dacă acestea sînt infinite sau nu, ar avea tot puterea $\aleph_0$, deci nici ea nu s-ar deosebi, ca putere, de o mulțime *oarecare* infinită. Aceasta nu înseamnă însă că mulțimile infinite, avînd *aceeași* putere, sînt *identice*. Există succesiuni infinite *determinate*, mai precis succesiuni care

⁴ Vide explicații amănunțite la O. Becker, *Măreșta și limitele gîndirii matematice*, Buc., 1968, p. 122 sq.

înaintează *ad infinitum*, pe baza unor *legi de formare* a elementelor. Printr-o astfel de lege poate fi determinat orice element al șirului în funcție de elementul precedent. În genere, legea garantează înaintarea succesiunii la infinit, oferind în același timp o metodă prin care poate fi construit întotdeauna un element pe baza celor construite deja. Practic aceste succesiuni nu *sînt* infinite, ci *tind* către infinit.

Există însă și succesiuni infinite *nedeterminante*, care iau naștere treptat prin *acte libere de alegere* a elementelor. O astfel de mulțime este numită și *mediu al devenirii libere* (*Medium des freien Werdens*). Un mediu al devenirii libere poate să ia naștere în urma prelungirii unor operații matematice, cum ar fi aceea de obținere a zecimalelor lui π , sau pur și simplu prin alegeri libere *arbitrare*. Acestea pot fi la rîndul lor *mai mult* sau *mai puțin libere*. Fiind vorba de o succesiune care înaintează liber $p_1, p_2, p_3, \dots$ și de entitățile obținute în prealabil în aritmetica finită, atunci alegerea liberă cu privire la primul termen, să zicem a_1 , al succesiunii, poate să fie *cu totul liberă*, respectiv a_1 poate fi un număr natural oarecare, o operație cu astfel de numere, un număr întreg negativ sau rațional sau o operație cu astfel de numere ș.a.m.d. Dar termenul a_1 poate fi admis și printr-o alegere *mai puțin liberă*, dacă dintre entitățile obținute în prealabil în aritmetica finită sînt excluse numerele raționale sau cele fracționare. Restricția poate să sune chiar astfel: „să se aleagă a_1 drept număr par mai mic decît 8”. Este evident că și în acest caz este vorba de o alegere liberă, dar mai puțin liberă decît în cazul în care restricția sună „a trebuie să fie un număr par”.

A concepe infinitul ca mediu al devenirii este o idee care apărea deja la Aristotel (οὐδὲ μένει ἡ ἀπειρα ἀλλὰ γίνεταί).⁵ De altfel, Aristotel a fost și primul care a considerat că infinitul nu poate fi decît potențial (δυνάμει). Brouwer, fără să se bazeze pe doctrina aristotelică, concepînd astfel infinitul, ajunge, ca și Aristotel, la concluzia că în aceste cazuri (în domeniul devenirii) nu ne mai putem încrede în gîndirea obișnuită, cu legile ei (τὸ δὲ τῇ νοήσει πιστεύειν ἄτοπον, zice Aristotel)⁶. Brouwer vorbește despre *caracterul suspect al legilor logice*, și în genere despre faptul că logica nu are pretutindeni (în filozofie, artă, științe) aceeași valoare⁷. Suspiciunea (*onbetrouwbaarheid*) brouweriană seamănă în mod evident cu „îndoiala” carte-

⁵ Aristoteles, *Physica*, I, 7, 207 b, 14.

⁶ *Phys.*, I, 8, 208 a, 14—15.

⁷ Brouwer, *De onbetrouwbaarheid*..., p. 12.

ziană (*de omnibus dubitandum*), avînd însă o sferă mai restrînsă, căci vizează numai domeniul logicului.

Dar, limitînd totuși discuția la domeniul matematicii transfinite, Brouwer constată că aici *nu toate* principiile logice sînt suspecte. Sînt certe de exemplu principiul silogismului și principiul contradicției⁸. Suspect este principiul terțului exclus (*tertium non datur*), urmat de legea dublei negații (*negatio duplex*), iar pe baza acestora se dovedește suspectă și demonstrația indirectă (*reductio ad absurdum*) și multe alte legi logice sau tautologii ale calculului propozițional, derivate din cele menționate.

Aceasta nu înseamnă însă că principiile în discuție *ar fi false*, ci doar faptul că *valabilitatea lor nu este universală*. În cadrul succesiunilor infinite determinate există situații în care rezolvarea unei probleme ar necesita o infinitate de operații. Aceasta înseamnă că, în ciuda faptului că un enunț se dovedește fals, enunțul contrar (negația acestuia) nu poate fi considerat pur și simplu adevărat (*tertium non datur*), căci nu există posibilitatea reală de a-l verifica. În cadrul succesiunilor infinite nedeterminate (arbitrare sau nu) situația este și mai clară. A considera, de exemplu, că enunțul „Între zecimalele lui π nu apare succesiunea 123456789” este fals (căci dacă nu ar putea să apară această succesiune, atunci șirul zecimalelor lui π nu ar fi infinit) nu ne permite să admitem pur și simplu că enunțul contrar, respectiv „Între zecimalele lui π apare succesiunea 123456789”, este adevărat, căci nimeni nu a verificat încă acest lucru. În situații analoge se poate întîmpla însă, în ciuda caracterului infinit și chiar nedeterminat al succesiunii în discuție, ca enunțul contrar să poată fi verificat. Să presupunem că este vorba de succesiunea (Z) formată din cifrele a două zaruri aruncate la un joc de table. Presupunînd că jocul ar dura foarte mult, enunțul „Între cifrele succesiunii (Z) nu poate să apară suita de perechi 66554433” este evident fals, în timp ce enunțul contrar, *cu totul întîmplător* însă, se poate dovedi adevărat chiar în cursul unei singure partide, dar se poate de asemenea întîmpla ca dovada să nu apară, oricît ar dura jocul respectiv.

În domeniul transfinitului deci principiile în discuție nu sînt universal valabile. Dar este ușor de arătat, chiar pe un exemplu de genul celui anterior, cum a sugerat F. Gonseth, că valabilitatea acestor principii poate fi relativă și în domeniul finitului⁹, căci și

⁸ *Ibidem*, p. 9.

⁹ F. Gonseth, *Les fondements des mathématiques*, Paris, 1926, p. 232.

aici sînt situații în care, chiar dacă nu este vorba de o infinitate de operații, anumite enunțuri sînt *practic* imposibil de verificat.

Toate acestea dovedesc, după Brouwer, faptul că o logică interpretată corect trebuie să fie o teorie în care *tertium non datur*, *negatio duplex*, *reductio ad absurdum* și alte formule derivate din ele nu sînt tautologii. Or, logica matematică, profesată de logiciști, nu este o astfel de teorie. Dacă ar fi, atunci în mod evident nu ar avea de-a face cu paradoxele, căci toate paradoxele în discuție au la bază admiterea valabilității universale a legii terțului exclus.

Dar concepția lui Brouwer nu are numai aspecte anticantoriene și antilogiciste, ci și aspecte *antiformaliste*, și în primul rînd astfel de aspecte. Este vorba aici chiar de celebra teorie a *intuiției*, dela care a derivat denumirea doctrinei.

Considerind că matematica este independentă de logică Brouwer a încercat reconstrucția ei pe alte baze decît cele logico-matematice. Teoria brouweriană a intuiției este destul de complicată. Ea conține elemente de tip aristotelic, kantian, dar și de tip berkeleyan și chiar hegelian. Esențial, pentru cadrul discuției de față, este faptul că în matematica intuïtionistă nu sînt admise decît entități matematice și operații cu astfel de entități, care pot fi construite intuitiv, fie direct fie indirect.

Făcînd abstracție de mecanismul complicat al intuiției brouweriene, se poate considera că pe baza acesteia pot fi construite primele două numere. Apoi unul dintre acestea poate fi conceput la rîndul său drept o dualitate, obținîndu-se numărul *trei* ș.a.m.d., „Numerele” în discuție nu sînt cifre, ci *concepte*, matematica intuïtionistă fiind considerată o „activitate nelingvistică a minții umane”. Este neesențial pentru activitatea matematică faptul că aceste concepte sînt exprimate sau nu (verbal sau în scris).

Construcția intuitivă a numerelor naturale cît și *repetarea* sau *anularea* unor astfel de construcții (*id est* construcția operațiilor aritmetice) este garantată de ceea ce Brouwer numește „primul act intuïtionist”. „Al doilea act intuïtionist” garantează construcția intuitivă a succesiunilor nedeterminate prin alegeri libere arbitrare sau nu. Metoda constructivă nu presupune însă construcția *da capo al fine* a oricărei probleme matematice. Numai primele numere pot fi construite intuitiv, restul se obține prin *repetarea* primelor construcții sau prescurtat prin indicarea unei *metode de construcție*. Repetarea însăși (iterația matematică *constructivă*) nu este sterilă, căci permite surprinderea intuitivă a unor legități, cum este de exemplu *principiul inducției complete*.

Construcția intuitivă reprezintă *garanția existenței matematice*. Ceea ce nu poate fi construit (mediat sau imediat) pe cale intuitivă este considerat ca *lipsit de sens*. Unul dintre scopurile matematicii intuiționiste este acela de a *curăța* matematica clasică de aceste *nonsensuri*. Este vorba de ceea ce formalistii numesc „mutilarea” matematicii. Nonsensurile pot fi, după St. Körner : *concepte* matematice neintuitive sau *ideale*, de exemplu infinitățile actuale ale lui Cantor, respectiv numerele transfinite, căroră nu le corespunde nici o construcție intuitivă ; *propoziții*, *legi* sau *axiome ideale* — primele deoarece *descriu* sau *exprimă* concepte ideale, ultimele deoarece le *produc* numai pe cale neintuitivă —, de exemplu propozițiile care descriu infinități actuale, axioma alegerii, a compoziției etc. și legi ca *tertium non datur* și *negatio duplex* și, în fine, *inferențe* sau *raționamente ideale*, fie pentru faptul că operează asupra unor concepte sau propoziții ideale, fie pentru aceea că sînt aplicate fără restricții la domenii în care valabilitatea lor este relativă (*reductio ad absurdum*).

Construcția intuitivă reprezintă prin urmare garanția existenței matematice. De aici decurge o teză fundamentală a matematicii intuiționiste, care este în mod evident opusă formalismului : *existența matematică* (concepută intuitiv) *implică întotdeauna necontradicția logică, dar necontradicția logică nu implică întotdeauna existență matematică efectivă*. În mod concret, această teză a determinat atitudinea permanent negativă a intuiționiștilor față de încercările formaliste de *axiomatizare* a teoriei mulțimilor.

Intuiționistic vorbind, orice teorie matematică construită intuitiv este evidentă și necontradictorie. Axiomatizarea ei *ulterioară* nu poate să aducă nimic în plus. Ea reprezintă doar *descrierea și sistematizarea expresiilor lingvistice* corespunzătoare *rezultatelor* matematice obținute în *prealabil*. În cadrul obișnuit al teoriei mulțimilor nu a fost obținută în *prealabil* o teorie intuitivă corespunzătoare, respectiv evidentă și necontradictorie (*dovezi* : neclarități în însăși definirea conceptului de mulțime, a operațiilor cu mulțimi și evident apariția paradoxelor în cadrul raționamentelor care conțin astfel de concepte și operații). Prin urmare, axiomatizarea teoriei mulțimilor, prin intermediul căreia formalistii nu urmăresc descrierea și sistematizarea unei teorii evidente și necontradictorii în sine, ci *construcția* ei axiomatice-necontradictorie, este inadmisibilă din punct de vedere intuiționist. Într-adevăr, axiomatizarea, pe baza unor restricții formaliste, duce la o teorie necontradictorie, dar menține în același timp *toate* conceptele dubioase care au generat contradicțiile.

Ideile expuse mai sus nu epuizează problematica intuïtionistă, nici măcar pentru cadrul restrîns al paradoxelor logico-matematice, care a constituit punctul de plecare al discuției, dar ilustrează, în schimb, cîteva dintre tezele *fundamentale* ale doctrinei intuïtioniste. Acestea prezintă un interes deosebit în contextul lucrării de față, căci ele marchează particularitățile logice ale intuïtionismului. Ideile în discuție pot fi rezumate în următoarele „teze intuïtioniste”

(I) Matematica pură este o activitate *independentă* față de limbaj.

(II) Obiectul matematicii pure îl constituie construcțiile matematice *intuitive nelingvistice*.

(III) Obiectul logicii matematice îl constituie *limbajul* matematic în care sînt exprimate, mai mult sau mai puțin exact, construcțiile matematice.

(IV) Existența matematică efectivă implică *întotdeauna* non-contradicție logică; noncontradicția logică *nu implică* însă *întotdeauna* existența matematică efectivă.

(V) Practicarea unei matematici corecte și a unei logici corespunzătoare face *imposibilă* apariția paradoxelor.

(VI) *Tertium non datur* și *duplex negatio* nu pot fi universal valabile în cadrul unei logici corecte, dar nu pot fi nici false.

(VII) Axiomatizarea nu poate fi admisă drept metodă de construcție a teoriilor matematice, ci numai ca *mijloc auxiliar* pentru descrierea și sistematizarea teoriilor matematice intuitive *preexistente*.

Obiectivul principal al intuïtionismului propriu-zis a fost și a rămas profesarea unei matematici intuitive, pure, independentă de limbaj și logică. Intuïtioniștii nu au fost însă adversari ai logicii în genere, ci numai ai logicii matematice în accepție logicistă sau formalistă. Intuïtionistic vorbind, este cu totul îndreptățită profesarea unei logici simbolice, adică a unei logici în formă de calcul, cu condiția ca aceasta să nu fie aplicată la matematici, nici pentru *fundamentarea* (poziția logicistă) și nici pentru *construcția* lor formală (poziția formalistă), ci dimpotrivă *matematicile trebuie să constituie fundamentele logicii, să fie aplicate la logică*, după ce au fost construite intuitiv.

Intuïtionismul, în forma lui originară (așa cum a fost profesat în Olanda pînă în 1930 și a continuat să fie profesat apoi numai de către intuïtioniștii conservatori) a lăsat însă fără răspuns întrebarea, pe care filozoful olandez G. Mannoury i-a pus-o lui Brouwer încă de

la începutul activităților intuiționiste : „Oare nu este posibilă o descriere formală a regularităților care apar în metoda de gândire intuiționistă”? Cu alte cuvinte, nu este oare posibilă elaborarea unei *logici a matematicii intuiționiste*, elaborarea unei logici care să fie deosebită de logica matematică obișnuită și în care să fie respectate toate tezele intuiționiste? Pentru a oferi răspunsul corespunzător este necesară însă cunoașterea prealabilă a încercărilor făcute în această direcție.

II. FORMALIZAREA TEZELOR INTUIȚIONISTE

Unul dintre primii care au încercat să trateze *comparativ* intuiționismul și formalismul și care a încercat un răspuns, ce-i drept de principiu, la întrebarea lui Mannoury a fost Richard Baldus.

Richard Baldus observă că deosebirea esențială dintre intuiționism și formalism, în ce privește tratarea matematicii, constă în aceea că reprezentanții primului consideră ferme și evidente legile simple ale numerelor întregi, care sînt surprinse prin intuiție și care, nu numai că nu necesită nici o demonstrație, dar sînt chiar nedemonstrabile, pe cînd reprezentanții formalismului descompun întreaga matematică în relații logico-formale¹⁰.

În privința concepției intuiționiste, expusă de către R. Baldus, trebuie remarcat că aceasta nu este o simplă reproducere a doctrinei lui Brouwer. La el întîlnim și idei inacceptabile din punct de vedere pur intuiționist, cum ar fi aceea referitoare la „definiția existențială a entităților matematice printr-un număr finit de cuvinte”, a cărei admitere ar însemna încălcarea primelor două teze intuiționiste.

Baldus ilustrează teza intuiționistă (VI) prin trei exemple: (1) teorema lui Goldbach — fiecare număr par poate fi reprezentat prin suma a două numere prime —, (2) clasificarea numerelor în algebrice — care satisfac o egalitate algebrică ai cărei coeficienți sînt numere întregi — și transcendente — care nu au proprietatea amintită și (3) problema lui Fermat — există oare patru numere naturale $n > 2$, x , y și z pentru care să fie valabilă egalitatea $x^n + y^n = z^n$? În legătură cu (1) conchide că, deși ar fi normal ca *fiecare* număr par să se comporte astfel, este practic imposibil să se dovedească acest lucru. Față de (2) conchide că, din punct de vedere intuiționist, nu are sens *disjunția*, „sau algebric sau transcendent” aplicată oricărui număr, deoarece nu se știe dacă pentru oricare număr se poate decide

¹⁰ R. Baldus, *Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik*, Karlsruhe, 1924, p. 24.

practic dacă este algebric sau transcendent, respectiv nu se cunoaște nici un procedeu general de decizie pentru aceste cazuri. În legătură cu (3) conchide că, în mod evident, există cazuri în care nu se poate decide nimic cu privire la membrii unei disjuncții de forma lui *tertium non datur*. Adică, în cazul problemei lui Fermat, nu poate fi admis nici răspunsul afirmativ, că există numerele în discuție, nici răspunsul negativ, că nu există astfel de numere. Exemplele sînt *gradate* și sugerează o *ierarhizare* a „suspiciunilor brouweriene” (1) simpla suspiciune care *nu afectează* conținutul unei teoreme, (2) suspiciunea care pune *la îndoială* teorema și (3) suspiciunea care *respinge* teorema.

Dintre acestea, cea mai interesantă este suspiciunea (2) care pune la îndoială universalitatea *deciziei prin disjuncție* (prin *tertium non datur*). R. Baldus, accentuînd asupra importanței logice a nedecidabilității (*Unentscheidbarkeit*), se înscrie drept precursor intuiționist al demonstrației lui K. Gödel din 1931. Iată cum exprimă Baldus acest lucru în mod plastic: „...*der Intuitionist erblickt beim Satze vom ausgeschlossenen Dritten stets neben dem Januskopfe des entweder oder das Medusenhaupt der Unentscheidbarkeit*”¹¹.

Alături de această previziune, mai mult sau mai puțin evidentă și din punctul de vedere al lui Brouwer, este aceea prin care Baldus descrie aproape exact *viitorul formalist* al intuiționismului. El remarcă faptul că rezultatele obținute de către intuiționiști nu sînt altceva decît o clarificare, o desăvîrșire a „...ceea ce pentru unii matematicieni, probabil destul de numeroși, era numai un sentiment neplăcut față de multe demonstrații, în special din teoria mulțimilor”¹². Logic vorbind, intuiționiștii au căutat „fundamentele originare ale acestui simțămînt” și au ajuns la concluzia „restringerii” la acele raționamente care sînt valabile pentru *oricine* și *oriunde*. Față de această contribuție incontestabilă „Formaliștii, prevede Baldus, se vor împărți în două tabere: unii, care după structura lor intelectuală, nu vor înțelege obiecțiunile intuiționiștilor; pentru aceștia toate demonstrațiile matematice vor rămîne la fel de sigure; alții, care vor admite că raționamentele, atestate și raționamentele respinse de către intuiționiști nu au aceeași stringență logică...”¹³. A doua grupă, continuă Baldus, va extinde demonstrația lipsei de contradicție a lui Hilbert pe spezele intuiționismului. În felul acesta se vor obține *două* sisteme complet axiomatizate, ambele corecte în sine. Apare deci, după previziunea mult mai vagă a lui Mannoury, ideea

¹¹ *Ibidem*, p. 28.

¹² *Ibidem*, p. 33.

¹³ *Ibidem*, p. 34.

clară de „sistem axiomatic intuiționist”, și chiar ideea de „formalism neointuiționist”.

A. N. Kolmogorov prezintă în 1925, avînd *poate* chiar înaintea lui Baldus, nu numai ideea, ci și inițiativa de a construi efectiv *primul sistem axiomatic* de logică intuiționistă. Lucrarea „О принципе tertium non datur” a rămas însă mult timp necunoscută. Ea nu este citată de Heyting nici măcar în 1955, cînd a adunat în *Les fondements des mathématiques* o impresionantă bibliografie privind intuiționismul. Lucrarea în discuție a fost tradusă în engleză și retipărită în 1967¹⁴.

Kolmogorov pornește de la ideea, formulată deja de către H. Weyl, a aplicării în special a tezei intuiționiste (VI), ilustrată de obicei numai cu exemple din matematica transfinită, și în domeniul finitului.

De acord cu Brouwer, el consideră că acest lucru este important chiar și pentru aceia pe care îi interesează *numai* domeniul matematicii finite. Aceasta, deoarece toate concluziile finitare corecte, obținute prin utilizarea legii tertului exclus, pot fi demonstrate și fără ajutorul acestei legi¹⁵. Cu alte cuvinte, că logica transfinitului, în care se aplică teza (VI), este valabilă și în domeniul finitului, pe cînd invers nu, căci concluziile obținute cu ajutorul legii tertului exclus sînt corecte numai dacă orice judecată, astfel obținută, este înlocuită cu o judecată care asertează dubla ei negație. El numește dubla negație a unei judecăți „pseudoadevărul” ei și conchide că numai în matematica pseudoadevărului este legitimă aplicarea legii tertului exclus.

Kolmogorov prezintă la început axiomele lui Hilbert pentru calculul propozițional. Este vorba de axiomele implicației¹⁶.

- | | |
|-------------------|--|
| (A ₁) | $p \rightarrow (q \rightarrow p),$ |
| (A ₂) | $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q),$ |
| (A ₃) | $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)),$ |
| (A ₄) | $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)),$ |
| (A ₅) | $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q),$ |
| (A ₆) | $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\sim p \rightarrow q) \rightarrow q).$ |

¹⁴ Cf. A. N. Kolmogorov, *On the principle of excluded middle* in: „From Frege to Gödel”, Harvard University Press, 1967.

¹⁵ *Ibidem*, p. 416.

¹⁶ D. Hilbert, *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, Mathematische Annalen, 88, 1923, p. 153.

Dintre acestea, (A_6) exprimă legea terțului exclus într-o formă ceva mai complicată. Deci (A_6) nu este admisibilă din punct de vedere intuïtionist.

Kolmogorov încearcă o primă interpretare intuïtionistă a funcțiilor „implică” și „non”. El arată că (A_5) (*ex falso sequitur quodlibet*) nu poate fi o axiomă a logicii intuïtioniste a propozițiilor¹⁷ — Kolmogorov folosește termenul de „judecată” (*judgement*) în locul termenului uzual de „propoziție” — deoarece nu are nici un temei intuitiv. Într-adevăr, dacă prin negație se înțelege, în termenii lui Brouwer, absurditatea¹⁸, atunci este evident că din ceva absurd nu poate urma nici adevărul, nici falsul. Astfel, conchide Kolmogorov, din punct de vedere intuïtionist nici una din cele două axiome ale negației, (A_5) și (A_6) , nu poate fi o axiomă a logicii generale a propozițiilor. În locul celor două axiome ale negației, el propune axioma

$$(A'_5) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p),$$

pe care o numește principiul contradicției (Dacă din p urmează, atât adevărul, cât și falsitatea lui q , atunci p este fals). În felul acesta, menținând primele patru axiome ale lui Hilbert și adăugind (A'_5) , se obține ceea ce Kolmogorov numește „Sistemul Brouwer”, spre deosebire de „Sistemul Hilbert”.

Trebuie menționat de la început faptul că denumirea de „sistem Brouwer”, „logică a lui Brouwer”, etc., nu sînt cu nimic îndreptățite. Aici este vorba despre „sistemul lui Kolmogorov” pe care îl notăm Σ_K spre deosebire de „sistemul lui Hilbert” (Σ_H). După cum remarcase deja R. Baldus, sisteme ca Σ_H și Σ_K sînt *sisteme formaliste* și în genere *orice sistem axiomatic de tip logico-matematic este un sistem formalist*. „Sistem axiomatic intuïtionist” este o *contradictio in adjecto*. Σ_K este un *model formalist* al ideilor lui Brouwer, a *codification of Brouwer's ideas*, cum spune Hao Wang¹⁹.

Σ_K are deja calitățile și defectele oricărui „sistem axiomatic intuïtionist”, termeni prin care vom înțelege „model axiomatic al ideilor intuïtioniste”. Calitățile lui sînt acelea ale oricărui sistem formalist. Defectele țin de faptul că autorul nu ia în considerație decît una dintre cele șapte teze intuïtioniste, și anume teza (VI).

¹⁷ A. N. Kolmogorov, *op. cit.*, p. 421.

¹⁸ Kolmogorov se referă la accepția negației din lucrarea lui L. E. J. Brouwer, *Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe*, din 1923.

¹⁹ H. Wang, *Notă* la lucrarea lui Kolmogorov din *op. cit.*, p. 114.

Deoarece (A'_5) nu contravine axiomelor lui Hilbert, ea, consideră Kolmogorov, poate înlocui (A_5) , iar (A_6) poate fi înlocuită cu

$$(A'_6) \quad \sim \sim p \rightarrow p$$

În cazul acesta, $\Sigma_K = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A'_5\}$ iar $\Sigma_H = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A'_5, A'_6\}$. Un merit deosebit al lui Kolmogorov, din punct de vedere formalist, este acela de a fi stabilit raportul dintre Σ_K și Σ_H , respectiv :

$$\Sigma_K = \Sigma_H - (A'_6),$$

sau invers

$$\Sigma_H = \Sigma_K + (A'_6).$$

Cele două formule ilustrează perfect caracterul *mecanicist* al trecerii de la o logică la alta și invers — trecerea este redusă la simpla *adăugare* sau *scădere* a unei axiome, ceea ce conferă sistemului un caracter evident formalist.

Fundamentul logicii lui Kolmogorov îl constituie teza intuiționistă (VI). Din această cauză, Σ_K este numai *parțial* fundamentat din punct de vedere intuiționist. Ce-i drept, la Kolmogorov întâlnim și unele încercări de argumentare de tip intuiționist. Astfel, respingerea lui (A_6) și înlocuirea lui (A_5) nu sînt făcute cu totul arbitrar, cum ar fi procedat un formalist propriu-zis, ci pe baza interpretării lor. Cu toate acestea, Kolmogorov nu pornește, cum ar fi fost normal, de la matematica intuiționistă către logică, ci de la un sistem de logică formalistă, care, conform primelor trei teze intuiționiste, nu are nici o legătură cu matematica intuiționistă.

Kolmogorov consideră că Σ_K este „logica generală” aplicabilă oricărui domeniu matematic, pe cînd Σ_H ar fi o „logică specială” cu domeniu limitat de aplicabilitate. Dar, în acest sens, logica intuiționistă, ca sistem formal (Σ_K), nu face decît să înlocuiască sistemele existente prin depășirea limitelor impuse de *tertium non datur*. Ea devine un fel de logică formalistă absolută, ceea ce, în mod evident, nu este în conformitate cu teza intuiționistă (VII). La Kolmogorov nu întâlnim nici o restricție privind limitele metodei axiomatice. Singura problemă rămîne aceea de a opta între unul dintre cele două sisteme.

Kolmogorov încearcă și construcția unui sistem axiomatic intuiționist pentru logica predicatelor. El stabilește următoarele axiome :

$$(P_1) \quad (\forall x) (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\forall x) A(x) \rightarrow (\forall x) B(x)),$$

$$(P_2) \quad (\forall x) (A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x) B(x)),$$

$$(P_3) \quad (\forall x) (A(x) \rightarrow C) \rightarrow ((\exists x) A(x) \rightarrow C),$$

$$(P_4) \quad A(x) \rightarrow (\exists x) A(x).$$

Procedeele de deducție sînt cele obișnuite în orice sistem formalist.

Problemele pe care le lasă deschise Kolmogorov sînt legate de perfecționarea sistemului. El însuși nu are convingerea că Σ_K ar fi un sistem axiomatic complet.

Deoarece lucrarea lui Kolmogorov nu a fost cunoscută, previ-ziunea lui Mannoury și Baldus a luat cîteva forme destul de contro-versate, care prezintă interes prin faptul că ridică problema unei *logici* intuiționiste în genere *înainte* de a fi cunoscut un sistem axiomatic de tip Σ_K .

R. Wavre se străduiește să fie un prezentator cît mai fidel, și impar-țial, al controversei dintre formalism și intuiționism. El încearcă uneori chiar o tratare istorică a unora dintre probleme, cum ar fi aceea a raportului dintre obiectul matematic și limbajul matematic, care, în forma generală a raportului dintre obiect sau gîndire și limbaj, a apărut încă din antichitate²⁰. El se referă pe larg și la poziția lui P. Brouwer, care este într-adevăr de natură intuiționistă.

P. Brouwer afirmă că „faptul matematic, este independent de veș-mîntul logic sau algebric sub care noi încercăm să-l reprezentăm... Expresia unui fapt este arbitrară, convențională, pe cînd faptul matematic, adică adevărul pe care îl conține, se impune spiritului nostru în afară de orice convenție. Atîta timp cît vedem în formule algebrice și combinații logice însăși obiectele matematice, nu putem justifica dezvoltarea teoriilor matematice, căci toate categoriile, utilizate

²⁰ R. Wavre, *Y a-t-il une crise des mathématique?*, Revue de Métaphysique et de Morale, 31, 1924, p. 348.

în aceste teorii, pot fi explicate numai dacă admitem că algebra și propozițiile logice nu sînt decît limbajul în care *traducem* o mulțime de noțiuni și de fapte obiective”²¹. R. Wavre subscrie acestui punct de vedere, adăugînd că „O construcție logică a matematicii, independentă de intuiția matematică, este imposibilă după Brouwer, deoarece s-ar obține astfel doar o construcție verbală, străină de matematică; în plus, ea ar constitui un cerc vicios, căci *logica se bazează ea însăși pe intuiția fundamentală a matematicii*”²², ceea ce corespunde primelor trei teze intuiționiste.

Pe de altă parte, chiar dacă s-ar admite o astfel de „construcție logică a matematicii”, nu trebuie uitat că logica obișnuită este universal valabilă numai în domeniul colecțiilor finite *determinate* în spațiu și timp.

Deși Wavre utilizează termenul de „logică empiristă”²³, care sună destul de contradictoriu, el nu înțelege prin aceasta o logică propriu-zisă, ci *suma* unor restricții intuiționiste, de natură *mai mult sau mai puțin* logică. El tratează pe larg problema continuului, ca *Medium des freien Werdens*. Cu această ocazie, ridică și două probleme de „Logică aplicată”. Una dintre ele se referă la valoarea legii terțului exclus, pe care o enunță în această formă: „Oare o propoziție perfect clară trebuie să fie proclamată adevărată sau falsă *a priori*, chiar dacă nu există nici un mijloc de a demonstra adevărul sau falsitatea ei?”²⁴ Wavre justifică punctul de vedere intuiționist cu exemple matematice, deși atinge în treacăt și aspectul istoric al problemei (problema viitorilor contingenți la Aristotel). A doua problemă este legată de *axioma comprehensiunii* a lui Zermelo, care, continuă Wavre, „... exprimă faptul că o definiție în comprehensiune este echivalentă cu o definiție în extensiune”. Este vorba de identificarea logicistă a existenței efective cu definiția corectă. „Este oare de ajuns să definim corect un obiect x printr-o proprietate A pentru ca obiectul x să existe efectiv?”

Wavre tratează pe larg probleme referitoare în special la teza intuiționistă (IV).

El pune cu această ocazie problema legitimității propozițiilor de existență, de tipul $(\exists x) F(x) =$ „există un obiect cu proprietatea F ”, care, din punct de vedere logicist, trebuie să fie adevărate sau false. El

²¹ P. Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, 1920, p. 170.

²² R. Wavre, *op. cit.*, p. 440.

²³ Cf. R. Wavre, *Logique formelle et logique empiriste*, Revue de Métaphysique et de Morale, 33, 1926.

²⁴ R. Wavre, *Sur le principe du tiers exclu*, Revue de Métaphysique et de Morale, 33, 1926, p. 428.

adoptă aici propoziția lui H. Weyl, după care, sînt valabile numai judecățile în care este atribuit un predicat determinat unui subiect determinat, adică acele judecăți care presupun, intuiționistic vorbind, existența unei modalități prin care poate fi obținut efectiv obiectul în discuție. Un cec cu indicația „Există o bancă de la care puteți ridica suma de 1 000 £” nu are nici o valoare. Existența *ideală*, afirmă Wavre, nu este decît o fereastră falsă deschisă de către logicist pentru a obține o simetrie între propozițiile logice și faptele matematice.

„Logica empiristă” a lui Wavre se dovedește astfel a fi mai degrabă o sumă de restricții, decît o logică propriu-zisă. Ea nu este o *teorie* opusă celei clasice, ci o *critică* a teoriei clasice.

Trebuie remarcat, cu această ocazie, faptul că admiterea consecventă a primelor patru teze intuiționiste, care antrenează în mod firesc și teza (VI), determină o poziție logică criticistă, neconstructivă, pe cînd admiterea tezei (VI), care nu le presupune însă pe primele patru, îngăduie în schimb construcții logice de tip axiomatic.

F. Gonseth este primul care încearcă să construiască (independent de Kolmogorov) „o altă logică” decît cea clasică. El pornește de la un punct de vedere *fictiv* intuiționist, pe care îl critică. Este vorba de teza, pe care o notăm cu (VI'), presupus intuiționistă, că legea terțului exclus nu ar fi de loc valabilă, deci ar fi falsă, cînd este vorba de categorii infinite²⁵. „Eu nu cred, susține Gonseth, că se va renunța la a se spune că *orice* număr întreg este par sau impar, afirmație care în mod sigur are un sens”. Pe de altă parte, el constată că „... pot să apară anumite mulțimi — care nu sînt cu necesitate infinite — în care, pentru anumite proprietăți, și pentru anumite elemente, să nu fie valabil nici *A* nici non-*A*...” Nici una dintre aceste constatări nu contrazice însă teza intuiționistă (VI).

Aceste constatări contrazic doar teza (VI'), pe care o combate Gonseth. Prin aceasta însă nu se obține altceva decît o întărire a tezei intuiționiste (VI), conform căreia *tertium non datur* nu este universal valabil, dar nici fals.

Insistînd asupra unor enunțuri echivalente cu teza (VI), dar ignorînd specificul doctrinei autentic-intuiționiste, concentrat în restul tezelor și în special în primele patru, Gonseth reușește, ca și Kolmogorov, să transforme aspectul critic al teoriei într-un pivot constructiv. Dacă nu este universal valabil faptul că orice propoziție este adevărată sau falsă, atunci, conchide Gonseth, înseamnă că există propoziții

²⁵ F. Gonseth, *Les fondements des mathématiques*, Paris, 1926, p. 193.

indiferente ²⁶. Atributul „indiferent”, acordat unei propoziții, nu apare la Brouwer și nu este un concept intuiționist. Într-adevăr, în cazul în care nu este valabilă legea terțului exclus, adică atunci când nu se poate decide dacă o propoziție este adevărată sau falsă, înseamnă că nu se poate construi nici un fapt matematic care să corespundă propoziției respective sau să o infirme. Cu alte cuvinte, atît propozițiile adevărate, cît și cele false, sînt verificabile prin construcții matematice, pe cînd presupusele propoziții indiferente nu. Din această cauză, ele nu au nici un statut intuiționist. În plus, dacă se admit astfel de propoziții, atunci, notînd o propoziție adevărată cu p , una falsă cu $\sim p$ și una indiferentă cu p' , obținem disjuncția ²⁷

$$(1) \quad p \vee \sim p \vee p',$$

ceea ce înseamnă că în locul legii terțului exclus va fi valabilă o *lege a quartului exclus*.

O astfel de împărțire a propozițiilor ar avea o semnificație intuiționistă numai în cazul în care ar prezenta vreun interes studiul *general* al propozițiilor. Însă, intuiționistic vorbind, prezintă interes numai propozițiile matematice, propozițiile constructibile. Din această cauză, *matematicianul intuiționist nu va ajunge niciodată la o propoziție indiferentă, căci aceasta nu poate fi construită*.

M. Barzin și **A. Errera** admit un punct de vedere asemănător. Dar ei nu consideră că există propoziții indiferente, care nu ar prezenta nici un interes intuiționist, ci propoziții *terțe*. „A afirma că o propoziție este terță, poate să însemne că este incertă... nimic nu se opune ca o propoziție care astăzi este terță, mîine să devină adevărată sau falsă...” ²⁸ Autorii în discuție recunosc însă faptul că Brouwer nu încearcă „construcția unei propoziții terțe”, că, prin urmare, ar fi vorba numai de *posibilitatea* și nu de existența *efectivă* a propozițiilor terțe. Cu toate acestea, ei vor să demonstreze „...că este imposibil să se raționeze admitînd un terț, fără să se ajungă la o contradicție...” ²⁹. Aceasta înseamnă că este imposibilă construcția unui sistem intuiționist à la Gosseth (Σ_{Go}).

²⁶ *Ibidem*, p. 225.

²⁷ *Loc. cit.*

²⁸ M. Barzin et A. Errera, *Sur la logique de M. Brouwer*, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1927, p. 59.

²⁹ *Ibidem*, p. 60.

Autorii demonstrează prin metode clasice propoziția

$$(2) \quad (p \& q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q),$$

ceea ce înseamnă „falsitatea unei conjuncții presupune falsitatea unuia dintre membrii ei”. Apoi pe baza legii quartului exclus, respectiv

$$(1) \quad p \vee \sim p \vee p'$$

ei deduc

$$(3) \quad \sim p = p \vee p'$$

$$(4) \quad \sim q = q \vee q'$$

Dacă (2) nu ar fi adevărată, se raționează în continuare, atunci ar fi adevărată

$$(2') \quad \sim (p \& q) \rightarrow (\sim p \& \sim q).$$

În (2') sînt înlocuiți apoi $\sim p$ și $\sim q$ cu echivalenții lor din (3) și (4) și se obține

$$(5) \quad \sim (p \& q) \rightarrow ((p \vee p') \& (q \vee q'))$$

Pe baza legii $(p \& q) \rightarrow p$ membrul al doilea ia forma

$$(6) \quad ((p \vee p') \& (q \vee q')) \rightarrow (p \vee p').$$

Dacă la acestea adăugăm

$$(7) \quad \sim p \rightarrow \sim (p \& q)$$

și combinăm formulele în conformitate cu principiul silogismului obținem

$$(8) \quad \sim p \rightarrow (p \vee p').$$

Trebuie să considerăm că (8) este o formulă absurdă, căci în caz contrar ar fi adevărată (2') și falsă (2), ceea ce ar încălca legea contradicției.

Dar, din moment ce (8) este absurdă, atunci nu mai este valabilă nici (3), care presupune

$$(9) \quad (\sim p \rightarrow (p \vee p')) \& ((p \vee p') \rightarrow \sim p).$$

Dacă nu este valabilă (3) atunci nu este valabilă nici (1), respectiv legea quartului exclus.

Demonstrația nu este întru totul riguroasă deoarece operează inițial cu *variabile* propoziționale bivalente, în care p de exemplu poate fi adevărat sau fals și $\sim p$ de asemenea, și introduce ulterior o *constantă* p' , care face ca p să fie adevărat și $\sim p$ să fie fals. Rezultatul obținut dovedește însă incompatibilitatea logicii bivalente cu cea trivalentă. Mai precis, admitînd în manieră intuiționistă valabilitatea principiului noncontradicției exprimat prin (2), care, după cum se știe, nu mai este o tautologie în logica trivalentă, trebuie să respingem *quartum non datur*. Logica intuiționistă nu poate fi un sistem Σ_{G0} , deoarece admite valabilitatea universală a legii noncontradicției.

Într-o lucrare ulterioară³⁰, autorii, referindu-se la punctul de vedere, enunțat de Alonso Church, conchid „Brouwerienii trebuie deci să se refugieze în a doua alternativă pe care le-o deschide D-nul Church : respingerea terțului exclus fără admiterea propozițiilor terțe”. Este evident că această alternativă este de fapt singura autentic-intuiționistă. Autorii în discuție se îndoiesc însă de posibilitatea ei și încearcă în continuare să demonstreze imposibilitatea admiterii simultane a propozițiilor terțe și a legii contradicției.

P. Lévy se înscrie inițial ca un adversar al „logicii empirice” în sensul dat de Wavre. El consideră restricțiile de tip intuiționist (cum ar fi : „interdicția de a pune o problemă pe care nu sîntem siguri că o putem rezolva” sau „interdicția de a vorbi despre un număr pe care nu îl putem calcula”) ca fiind restricții arbitrare³¹. Ulterior³², el încearcă o interpretare personală pe coordonatele sistemului Σ_{G0} , afirmînd că „logica lui Brouwer”, astfel concepută, nu duce la nici o contradicție.

Fie α un enunț și β contrariul său. Spunem că α este adevărat în sensul lui Brouwer, afirmă Lévy, dacă adevărul său poate fi demon-

³⁰ M. Barzin et A. Errera, *Sur le principe du tiers exclu*, Archives de la Société Belg. de Philosophie, 1929, p. 9 sq.

³¹ P. Lévy, *Critique de la logique empirique*, Revue de Métaphysique et de Morale, 33, 1926, p. 551.

³² Cf. P. Lévy, *Logique classique, logique brouwerienne et logique mixte*, Bulletin de la Classe de Sciences de L'Académie royale de Belgique, 1927.

strat. Notăm acest lucru cu $+\alpha$ sau A , de unde $+\alpha = A$, și tot așa $+\beta = B$. Dintre α și β , unul și numai unul este întotdeauna adevărat, pe cînd dintre două enunțuri brouweriene A și B se poate întîmpla ca nici unul să nu fie adevărat. Pe acest temei introduce Lévy a treia valoare. Expunerea este însă extrem de greoaie și confuză. Astfel, după ce s-a stabilit că A este un α adevărat à la Brouwer, iar B un β adevărat, Lévy consideră totuși că α este adevărat în cazul A și fals în cazul B , iar pentru cazul în care nu ar fi nici adevărat nici fals introduce un C ipotetic. Dar, în felul acesta, enunțurile brouweriene sînt identificate cu înseși valorile de adevăr. Deci ar exista o logică clasică, a enunțurilor, și o logică brouweriană, a valorilor acestor enunțuri. Ideea nu apare însă explicit. Însăși starea terță este pusă la îndoială, „... nu se poate demonstra, afirmă Lévy, nici imposibilitatea acestei stări, nici existența ei efectivă; trebuie s-o considerăm deci ca pe o simplă posibilitate logică”³³.

S. Avsitydsky completează punctul de vedere susținut de Lévy. El consideră plauzibilă starea terță, deoarece „logica matematică empiristă”, spre deosebire de logica formală, pe care el o numește și „a negației sau a adevărului și falsului”, nu mai operează cu alternativa adevăr-fals, ci cu *adevărul* și *absurdul*, între care nu mai apare *alternativa*³⁴. Adevărul semnifică ceea ce este demonstrabil efectiv; absurdul, ceea ce poate fi redus efectiv la o contradicție. Absurdul implică falsul, dar falsul nu implică întotdeauna absurdul. Din acestea rezultă că „logica matematică empiristă” introduce nuanțări ale valorilor de adevăr. Mai precis, nuanțează falsul. O propoziție este terță, dacă nu mai poate fi nici efectiv demonstrată, nici efectiv redusă la absurd. Terțul ar fi deci „un fel de fals” care nu este însă absurd. Urmărind în continuare astfel de subtilități, autorul ajunge să distingă două tipuri de propoziții terțe: unele a căror „terțialitate” poate fi demonstrată și altele a căror „terțialitate” nu poate fi demonstrată niciodată³⁵.

M. V. Glivenko este primul care respinge categoric introducerea propozițiilor terțe în „logica lui Brouwer”, invocînd motivul că introdu-

³³ *Ibidem*, p. 259.

³⁴ S. Avsitydsky, *Note relative au travail de M. Barrin et A. Errera*, „Sur la logique de M. Brouwer”, *Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 1927, p. 724.

³⁵ *Ibidem*, p. 725.

cerea lor este la fel de ilegitimă în acest caz, ca și în cazul logicii clasice ³⁶. Abandonînd această pistă dificilă, Glivenko elaborează un al doilea sistem axiomatic intuiționist, pe care îl notăm Σ_{GI} . Sistemul conține următoarele axiome :

- (A₁) $p \rightarrow p,$
- (A₂) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)),$
- (A₃) $(p \& q) \rightarrow p,$
- (A₄) $(p \& q) \rightarrow q$
- (A₅) $(r \rightarrow p) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \& q))),$
- (A₆) $p \rightarrow (p \vee q),$
- (A₇) $q \rightarrow (p \vee q),$
- (A₈) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)),$
- (A₉) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p),$
- (A₁₀) $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p),$
- (A₁₁) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p).$

Glivenko nu-și pune problema calităților formale ale sistemului. Din această cauză, într-un studiu ulterior ³⁷ mai adaugă patru axiome și anume :

- (A₁₂) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)),$
- (A₁₃) $(p \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r),$
- (A₁₄) $p \rightarrow (q \rightarrow p),$
- (A₁₅) $\sim q \rightarrow (q \rightarrow p).$

³⁶ M. V. Glivenko, *Sur la logique de M. Brouwer*, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1928, p. 225.

³⁷ M. V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1929, p. 184.

Ca și Kolmogorov, Glivenko își pune problema raportului dintre Σ_{G1} și un eventual sistem clasic Σ_C . El ajunge la concluzia că singura deosebire dintre Σ_{G1} și Σ_C , ar fi introducerea în Σ_{G1} a unei noi axiome care să conțină terțul exclus, respectiv

$$(A_{16}) \quad p \vee \sim p$$

Deci regulile ar fi următoarele :

$$\Sigma_C = \Sigma_{G1} + A_{16},$$

$$\Sigma_{G1} = \Sigma_C - A_{16}.$$

La acestea Glivenko adaugă următoarele observații :

(1) Dacă o anumită expresie din logica propozițiilor este demonstrabilă în Σ_C , atunci falsitatea falsității acestei expresii este demonstrabilă în Σ_{G1} . (2) Dacă falsitatea unei anumite expresii din logica propozițiilor este demonstrabilă în Σ_C , aceeași falsitate este demonstrabilă în Σ_{G1} . Glivenko demonstrează de exemplu teorema

$$(T_1) \quad \sim(\sim(\sim p \vee p)),$$

care înseamnă : „Propoziția «propoziția $(\sim p \vee p)$ este falsă» este falsă”, ceea ce ar însemna că, din punct de vedere intuïționist, legea terțului exclus nu este considerată falsă ; sau

$$(T_2) \quad \sim(\sim(\sim q)) \rightarrow \sim q,$$

care înseamnă „Falsitatea falsității unei propoziții false q implică falsitatea propoziției q ”.

Sistemul Σ_{G1} , o dată construit, urma să fie perfecționat și extins la calculul cu predicate.

Este demn de remarcat faptul că Glivenko lucrează strict formalistic. El nu încearcă să justifice în nici un fel admiterea sau nu a axiomei care conține *tertium non datur*. Nu-l interesează în nici un fel semnificația intuïționistă a formelor logico-matematice, și nici limitele utilizării metodei axiomatice. Logica lui este, mai mult decât aceea a lui Kolmogorov, o logică fundamentată numai pe teza intuïționistă (VI). Demonstrând că este falsă afirmația că legea terțului exclus este falsă, Glivenko a reușit într-adevăr să impună tendința axiomatică a logicii intuïționiste.

Pînă în acest moment, se poate conchide că inițial au existat două tendințe de fundamentare a unei logici intuïționiste : una, care pornește de la tezele intuïționiste (I), (II), (III) și (IV) și alta, care ia

drept fundament teza (VI). Prima tendință s-a dovedit fără implicații deosebite în privința aspectului sistematic, extensiv al logicii, dar profundă prin reflexiile sale de conținut. A doua tendință a determinat două direcții, la fel de îndreptățite, care se îndepărtează însă, tocmai datorită ignorării celorlalte teze, de doctrina intuiționistă propriu-zisă. Ieșirea din cadrul bivalent al logicii se bazează într-adevăr numai pe încercarea de a construi o logică în care *tertium non datur* să nu mai fie o tautologie, iar excluderea axiomelor de forma lui *tertium non datur* sau *duplex negatio* are același fundament, deși consecințele sînt numai axiomatice.

Problema care rămînea deschisă era aceea de a încerca construcția unei logici în conformitate cu ambele tendințe, deci fundamentată pe ansamblul tezelor intuiționiste.

Sistemul axiomatic al lui A. Heyting

Spre deosebire de autorii menționați, care au încercat construcția unei logici intuiționiste fără a fi matematicieni intuiționiști, deci oarecum din afara intuiționismului (restrîns în acea vreme doar la matematici), Heyting și-a început activitatea științifică cu lucrări de matematică intuiționistă. Ce-i drept, el a mers pe o linie diferită de aceea inaugurată de Brouwer, după care „...aprioritatea timpului nu califică numai proprietățile aritmeticii ca judecăți sintetice *a priori*, ci și pe cele ale geometriei, și nu numai pentru geometria elementară cu două sau trei dimensiuni, ci și pentru geometriile neeuclidiene și *n*-dimensionale”³⁸. Primii intuiționiști (B. de Loor și M. J. Belinfante), adoptînd acest punct de vedere, s-au interesat în mod consecvent numai de probleme aritmetice și algebrice, considerînd că, o dată cu acestea, sînt rezolvate și problemele geometriei. „De la Descartes am învățat, spunea Brouwer, să reducem toate geometriile la aritmetică prin intermediul calculelor de coordonate”³⁹. Heyting inaugurează totuși o interpretare intuiționistă a *geometriei projective*. Pe această linie, el ajunge în mod natural la problema *axiomatizării intuiționiste a geometriei*⁴⁰ și în genere la problema unui sistem axiomatic de tip intuiționist, ceea ce nu intra în preocupările celorlalți intuiționiști.

³⁸ L. E. J. Brouwer, *Intuitionism and formalism*, Bull. Amer. Math. Soc., 20, 1913, p. 86.

³⁹ Brouwer, *loc. cit.*

⁴⁰ A. Heyting, *Intuitionistische Axiomatik der projective Meerkunde*, Groningen, 1925.

Din această cauză, în cursul dezbaterilor privind logica intuiționistă Heyting optează pentru varianta axiomatică a lui Glivenko, dar, în calitate de matematician intuiționist, nu poate fi întru totul satisfăcut de aspectele evident formaliste legate de Σ_{GI} . El revine asupra aspectelor de conținut propuse de P. Lévy⁴¹. Cu alte cuvinte, încearcă o extindere a fundamentelor logicii intuiționiste, de la aspectele pur formale pe care le implică teza (VI) la aspectele de conținut pe care le implică primele patru teze. El insistă asupra specificului intuiționist al afirmației, negației și demonstrabilității matematice, care nu pot fi înglobate într-o descriere pur formalistă a logicii.

Din această cauză, Heyting, înainte de a trece la expunerea a ceea ce se numește de regulă „logica intuiționistă”, respectiv a sistemului Σ_{Hy} , se simte dator să facă câteva precizări⁴². El începe prin a aminti faptul că „Matematica intuiționistă este o activitate a gândirii pentru care orice limbaj, chiar și cel formalist, nu este decît un mijloc auxiliar de comunicare. În principiu, continuă el, este imposibilă construcția unui sistem formal care să fie echivalent cu matematica intuiționistă, căci posibilitățile gândirii nu pot fi reduse la un număr finit de reguli stabilite în prealabil”. Această remarcă este în perfectă concordanță cu primele trei teze intuiționiste. În plus, adaugă Heyting, pentru reconstrucția matematicii nu este necesară stabilirea unor legi logice universal valabile, căci aceste legi sînt redescoperite în fiecare caz particular ca fiind valabile sau nu în funcție de domeniul în care se lucrează, ceea ce amintește de conținutul tezei (IV).

Încercarea de a reda, într-un limbaj formalizat, cele mai importante părți ale matematicii, consideră Heyting, nu ar avea alt scop decît acela de a profita de avantajele evidente ale simbolismului față de limbajul uzual. Cu toate acestea, Heyting construiește un sistem, pe care el însuși îl numește formalist (*ein formalistisches System*), pornind nu de la fundamentele intuiționiste, respectiv de la matematica intuiționistă și de la tezele pe care aceasta le implică, ci de la rezultatele obținute în prealabil de către Glivenko.

Una dintre particularitățile inițiale ale sistemului Σ_{Hy} o constituie faptul că constantele și variabilele (notate cu $a, b, c, \dots$), spre deosebire de cele obișnuite, desemnează numai *propoziții matematice*. În locul semnelor obișnuite pentru operațiile logice, respectiv ($\sim, \rightarrow$,

⁴¹ A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste*, Bull. Acad. Sc. Belg., 1930, p. 957.

⁴² Vide A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, 1930, p. 42.

&, $\vee$), Heyting introduce semnele $\neg$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$. El sugerează faptul că operațiile respective au altă semnificație decât cea formalistă. În primul rând, ele nu pot fi definite unele prin altele⁴³. Formulele următoare sînt corecte, dar conversele lor nu :

$$(4.46) \quad (\neg a \vee b) \supset (a \supset b).$$

$$(4.9) \quad (a \supset b) \supset \neg (a \wedge \neg b).$$

$$(4.47) \quad (a \vee b) \supset (\neg a \supset b).$$

$$(4.91) \quad (a \vee b) \supset \neg (\neg a \wedge \neg b).$$

$$(3.6) \quad (a \vee b) \supset ((a \supset b) \supset b).$$

$$(4.91) \quad (a \wedge b) \supset \neg (\neg a \vee \neg b).$$

Heyting insistă în special asupra formei $(a \supset b)$, care semnifică „dacă a este corect, atunci și b este corect”. Asupra semnificației operatorilor va reveni însă ulterior⁴⁴. În locul parantezelor Heyting utilizează puncte, iar pentru echivalență folosește semnul implicației reciproce $(\supset \subset)$. Teoremele sînt precedate de semnul „ $\vdash$ ”, iar axiomele de semne „ $\vdash \vdash$ ”.

Axiomele sistemului Σ_{Hy} , transcrise cu paranteze, sînt :

$$(A_{2.1}) \quad \vdash \vdash a \supset (a \wedge a).$$

$$(A_{2.11}) \quad \vdash \vdash (a \wedge b) \supset (b \wedge a).$$

$$(A_{2.12}) \quad \vdash \vdash (a \supset b) \supset ((a \wedge c) \supset (b \wedge c)).$$

$$(A_{2.13}) \quad \vdash \vdash ((a \supset b) \wedge (b \supset c)) \supset (a \supset c).$$

$$(A_{2.14}) \quad \vdash \vdash b \supset (a \supset b).$$

$$(A_{2.15}) \quad \vdash \vdash (a \wedge (a \supset b)) \supset b.$$

$$(A_{3.1}) \quad \vdash \vdash a \supset (a \vee b).$$

$$(A_{3.11}) \quad \vdash \vdash (a \vee b) \supset (b \vee a).$$

$$(A_{3.12}) \quad \vdash \vdash ((a \supset c) \wedge (b \supset c)) \supset ((a \vee b) \supset c).$$

$$(A_{4.1}) \quad \vdash \vdash \neg a \supset (a \supset b).$$

$$(A_{4.11}) \quad \vdash \vdash ((a \supset b) \wedge (a \supset \neg b)) \supset \neg a.$$

⁴³ *Ibidem*, p. 44.

⁴⁴ Vide e. g. : A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, Paris, Lovain, 1955, p. 16–17 și A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, Amsterdam, 1966, p. 98–99.

Heyting demonstrează independența axiomelor utilizând metoda lui P. Bernays. Pentru aceasta, el caută mai întâi *elementele matematice*, cum ar fi numerele întregi pozitive, pe care le grupează. Aceste elemente devin apoi valorile unor *matrici arbitrare*. Se arată că, pe baza acestor matrici arbitrare, una dintre axiome nu obține aceeași valoare constantă pe care o obțin toate celelalte.

Pentru a demonstra independența axiomei ($A_{2.1}$), Heyting alege ca elemente cifrele : 0, 1, 2 și alcătuiește următoarele matrici arbitrare :

(I)	$\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0		1	0	1
	1	2	0	2	1	1	1	1	1	0	1	2				
	2	2	0	0	2	1	1	1	2	0	2	2				

Pentru a demonstra independența axiomei ($A_{2.14}$) alege *aceleași* elemente, dar alte matrici arbitrare, și anume :

(V)	$\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		1	0	1
	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0				
	2	1	0	1	2	0	1	0	2	0	0	0				

Pentru axioma ($A_{2.11}$) alege ca elemente pe 0 și toate numerele întregi pozitive ; pentru ($A_{2.12}$) alege pe 0 plus toate numerele întregi pozitive și negative ș.a.m.d.

Prin aceeași metodă, alegând elementele 0, 1, 2 și matricele arbitrare :

(XII)	$\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0		1	0	1
	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	2				
	2	2	0	0	2	2	1	2	2	0	2	2				

Se poate arăta că expresia $\neg \neg a \supset a$ este independentă de *toate* axiomele alese.

Dacă transcriem semnele sistemului Σ_{Hy} în semnele sistemului Σ_C , astfel :

$$\supset, \vee, \wedge, \neg$$

$$\rightarrow, \mathbf{V}, \&, \sim$$

atunci constatăm că expresia $\neg \neg a \supset a$ devine $\sim \sim a \rightarrow a$, care seamănă cu formularea dublei negații ($\sim \sim p \rightarrow p$). Ele nu sînt însă identice, deoarece $a \neq p$. Numai făcînd abstracție de acest lucru s-ar putea considera că Σ_C ar putea fi obținut din $\Sigma_{Hy} + \textit{negatio duplex}$. În plus, transcrierea constantelor de mai sus nu este admisibilă din punct de vedere intuiționist.

Heyting admite cele două observații ale lui Glivenko. Acestea iau forma : (1') Dacă o propoziție a este demonstrabilă în Σ_C , atunci propoziția „ a nu poate să fie falsă” este demonstrabilă în Σ_{Hy} . (2') Dacă propoziția „ a este falsă” este demonstrabilă în Σ_C , este demonstrabilă și în Σ_{Hy} .

În maniera lui Glivenko, Heyting demonstrează teze ale calculului propozițional, printre care și următoarele :

$$(4.3) \quad \vdash a \supset \neg \neg a.$$

$$(4.31) \quad \vdash \neg a \supset \neg \neg \neg a.$$

$$(4.32) \quad \vdash \neg \neg \neg a \supset \neg a.$$

$$(4.45) \quad \vdash (a \vee \neg a) \supset (\neg \neg a \supset a).$$

$$(4.8) \quad \vdash \neg \neg (a \vee \neg a).$$

$$(4.31) \quad \vdash \neg \neg (\neg \neg a \supset a).$$

Prima ilustrează o lege a logicii formaliste, a cărei conversă nu e valabilă în Σ_{Hy} , iar ultimele două ilustrează observația (1'), adică : fiind demonstrabilă în Σ_C teza $(a \vee \neg a)$ în Σ_{Hy} este demonstrată imposibilitatea falsității ei, respectiv

$$(4.8) \quad \neg \neg (a \vee \neg a).$$

Heyting încearcă și construcția unui sistem formalist pentru calculul cu predicate. Sistemul inițial este foarte complicat ⁴⁵. Heyting însuși renunță la varianta inițială și adoptă ulterior metoda lui Hilbert și Ackermann ⁴⁶, care constă în adăugarea la sistemul de calcul propozițional a următoarelor formule :

$$(H_1) \quad (\forall x) a(x) \supset a(y),$$

$$(H_2) \quad a(y) \supset (\exists x) a(x).$$

Procedeul deductiv este acela obișnuit în calculele formaliste. Conform restricțiilor axiomatice, nici în calculul cu predicate nu vor apărea teoreme de forma lui *tertium non datur* sau *duplex negatio*. Heyting insistă asupra următoarelor formule :

$$(H_3) \quad (\exists x) a \supset \neg (\forall x) \neg a,$$

$$(H_4) \quad (\forall x) a \supset \neg (\exists x) \neg a,$$

$$(H_5) \quad (\exists x) \neg a \supset \neg (\forall x) a,$$

$$(H_6) \quad (\exists x) \neg \neg a \supset \neg \neg (\exists x) a,$$

$$(H_7) \quad \neg \neg (\forall x) a \supset (\forall x) \neg \neg a,$$

care sînt valabile intuiționistic, în timp ce conversele lor nu mai sînt valabile ; ceea ce implică restricții serioase pentru obținerea echivalențelor între formulele cuantificate.

După obținerea celor două calcule, Heyting încearcă aplicarea lor la matematica intuiționistă, prin introducerea unor semne speciale corespunzătoare conceptelor intuiționiste de „specie” și „succesiune de alegeri” ⁴⁷.

⁴⁵ Vide A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik*, II, Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, 1930, pp. 57—71.

⁴⁶ A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 21.

⁴⁷ A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik*, III, Sitzungsberichte..., 1930, p. 160.



Elaborarea sistemului Σ_{Hy} , în ciuda faptului că acesta a fost și mai continuă încă să fie numit „logica intuiționistă”, nu a determinat încheierea discuțiilor în legătură cu această logică. Dimpotrivă, se poate spune că a înviorat disputele oferind noi subiecte de discuție.

Conform previziunii lui Baldus, Σ_{Hy} a fost „adoptat” de către formalisti drept o simplă variantă de sistem axiomatic, făcându-se bineînțeles abstracție de considerațiile *neformale*, de natură intuiționistă, pe care Heyting le-a făcut *pe marginea* sistemului. Atitudinea formalistilor a fost îndreptățită. Într-adevăr, considerațiile intuiționiste, nefiind de ordin formal, nu pot fi încadrate în sistem, ceea ce înseamnă că sistemul este independent de acestea. Faptul că o serie de formule, ca *tertium non datur*, nu sînt deductibile în Σ_{Hy} , nu îndreptățește cu nimic, după cum observă A. Schmidt, atributul de „intuiționist”, căci cauza este de natură pur formalistă, respectiv o *restricție axiomatică*. În acest sens, formalistii înșiși au construit o mulțime de sisteme restrictive, dintre care multe sînt analoage cu Σ_{Hy} .

La aceasta se adaugă și faptul că, pornind de la aceleași principii ca și Heyting, chiar intuiționistii au trecut la elaborarea „în serie” a sistemelor „intuiționiste”, ceea ce dovedește caracterul arbitrar al punctului de plecare. Σ_{Hy} , ca și întreaga serie de sisteme analoage, a rămas *fără o interpretare precisă* (deși inițial trebuia să fie o logică a matematicii intuiționiste). Or, aceasta — lipsa unei „interpretări precise” — este o caracteristică proprie sistemelor formaliste în genere.

Toate acestea dovedesc faptul incontestabil că, deși Heyting era matematician intuiționist și a înțeles că fundamentele logicii intuiționiste nu pot fi reduse doar la satisfacerea cerințelor pe care le presupune teza intuiționistă (VI), a elaborat un *sistem formalist*, ale cărui *fundamente* pot fi la rîndul lor *formaliste*. Într-adevăr, teza (VI) poate fi completată cu teze *contrare* celorlalte teze intuiționiste cum ar fi : (I') Matematica nu este independentă de limbaj ; (II') Obiectul matematicii îl constituie construcțiile lingvistice sau (VII') Axiomatizarea este o metodă de construcție a teoriilor matematice. Cu alte cuvinte, în ciuda faptului că este respectată teza (VI), în contextul sistemului formalistic Σ_{Hy} , se poate ajunge la concluzia că nu matematica intuiționistă determină fundamentele logicii intuiționiste, ci invers. Ceea ce ar rămîne de făcut, după expresia lui Baldus, ar fi încercarea de „a extinde demonstrația lipsei de contradicție a lui Hilbert pe spezele intuiționismului”.

Heyting însuși și-a dat seama de acest pericol, iar în ultimele sale lucrări a devenit un adversar declarat al consecințelor formaliste

pe care le-a determinat elaborarea propriului său sistem ; un adversar declarat în special al tezei (VII'). Contribuțiile sale în această direcție sînt remarcabile însă lipsite de eficacitate, din cauza faptului că sînt imposibil de redat în context axiomatic.

Tot Heyting a fost inițiatorul interpretărilor intuiționiste ale propriului său sistem. Viciul acestor interpretări rezidă în faptul că se urmărește tocmai calea *inversă*, adică se pornește de la Σ_{HY} către matematica intuiționistă. Dar drumul de la logică spre matematici ține de maniera logicist-formalistă și poate să ducă, ceea ce s-a și întîmplat, la încercări de fundamentare logico-formalistă a matematicii intuiționiste. În cazul în care nu se ajunge atît de departe, se obțin rezultate minime, destul de discutabile din punct de vedere intuiționist. Aceasta, datorită faptului că interpretările nu corespund simultan celor șapte teze intuiționiste. Lucrul este și firesc, din moment ce Σ_{HY} a fost elaborat pe baza *unei singure* teze.

O altă dificultate serioasă este legată de interpretarea *celorlalte* sisteme „intuiționiste”, dintre care majoritatea au fost elaborate în mod analog cu Σ_{HY} , fiind totuși *diferite* de acesta. Dacă punctul de plecare îl constituie obținerea arbitrară a sistemelor și dacă acestea prin interpretare oferă aceleași avantaje ca Σ_{HY} , atunci dispare orice criteriu intuiționist de apreciere a valorii lor.

Pentru a evita toate aceste dificultăți există o singură cale și și anume aceea de a încerca fundamentarea unei *teorii logice generale* care să corespundă *da capo* celor șapte teze intuiționiste. Dar nu numai *teoria logică* trebuie să corespundă acestor teze, ci și *metoda ei de construcție*.

Pentru ca *obiectul* teoriei logice să-l constituie *limbajul matematic*, nu trebuie să se pornească de la construcția unui *limbaj simbolic* care să fie *ulterior interpretat* matematic, ci de la matematica însăși către propriul ei limbaj, în conformitate cu primele trei teze intuiționiste. Pentru ca teoria logică să fie necontradictorie, nu trebuie să se pornească de la construcția arbitrară a unei teorii logice necontradictorii, ci de la matematica intuiționistă, în care este imposibilă apariția contradicțiilor. În felul acesta, teoria logică va fi în același timp *corespunzătoare* matematicii intuiționiste, avînd ca obiect tocmai limbajul acesteia, și va fi totodată *necontradictorie*, în conformitate cu tezele (IV) și (V).

Pentru ca anumite legi logice, principii sau metode să nu fie utilizate în teoria logicii intuiționiste, nu este necesară respingerea lor *a priori*, căci însăși apariția lor în cadrul teoriei (ca legi universal

valabile) este imposibilă. Într-adevăr, din moment ce în matematica intuiționistă nu se raționează pe baza acestor legi, nici expresia lingvistică a raționamentelor intuiționiste nu le va conține.

În fine, conform tezei (VII), axiomatizările (de tipul Σ_{Hy}) nu pot fi admise drept metode *de construcție* a teoriei logice intuiționiste, deoarece aceasta are ca obiect limbajul matematic. Este necesară *în prealabil* construcția *intuitivă* a teoriei, axiomatizarea avînd doar rolul de-a o *descrie* și de-a o *sistemiza*.

Pe această cale se poate obține o teorie logică fără nici un echivoc, o *logică a matematicii intuiționiste*, pentru care ar fi greșită orice altă interpretare. Față de o astfel de teorie vor exista și criterii precise de apreciere a eventualelor sisteme axiomatice.

Din acest punct de vedere, se poate conchide că Σ_{Hy} , în ciuda intențiilor intuiționiste ale lui Heyting, nu constituie o logică a matematicii intuiționiste, ci doar o continuare a tendinței formaliste inițiată de Kolmogorov și Glivenko. Elaborarea prealabilă a unei teorii logice intuiționiste ține mai degrabă de cealaltă tendință inaugurată de Wavre și Lévy, tendință temporar abandonată tocmai din cauza succesului formalistic al primei tendințe. În acest sens, s-ar putea spune că Σ_{Hy} , prin prestigiul dobîndit, a reprezentat chiar o piedică în fundamentarea propriu-zisă a logicii intuiționiste. Aceasta nu l-a împiedicat însă pe A. Heyting, autorul sistemului, să aibă contribuții importante, care vor fi menționate în continuare, pe linia dezvoltării comprehensive a logicii intuiționiste. Legătura însă, dintre aceste contribuții și propriul său sistem, a rămas de cele mai multe ori în suspensie. Pe de altă parte, nu trebuie uitat nici faptul că tendința comprehensivistă era și ea limitată, mărginindu-se, la aplicarea primelor teze intuiționiste într-o manieră cu totul generală, fără referințe directe la matematica intuiționistă și ignorînd aspectele sistematice, pe care le relativizează într-adevăr teza (VII), dar în nici un caz nu le exclude.

Logica intuiționistă, în calitate de *teorie* generală nu se poate mărgini deci nici la simpla descriere formală, lingvistică a matematicii intuiționiste și nici la un simplu sistem formalist, axiomatic. Ea trebuie să fie în concordanță cu *toate* tezele intuiționiste. Mai mult, înăși construcția ei găsindu-și fundamentele în aceste teze, ele trebuie să-i fie *immanente*. Dar tezele intuiționiste în discuție nu sînt altceva decît consecințe directe ale matematicii intuiționiste. Dacă matematica intuiționistă va constitui baza reală a unei teorii logice, atunci, *implicit*, tezele intuiționiste, în ansamblul lor, vor constitui *funda-*

mentele logice și metodologice ale acestei teorii. Altfel, rupte de matematica intuiționistă, ele apar drept simple restricții arbitrare, care pot fi tratate izolat și, așa cum s-a observat deja, pot fi încadrate ușor în contexte formaliste.

Trebuie menționat faptul că în opera lui Brouwer, deși acesta nu a încercat niciodată, în mod efectiv, construcția unei logici, se găsesc multe elemente deosebit de importante pentru fundamentele logicii intuiționiste. Indicații metodologice prețioase în legătură cu raportul dintre matematica pură și logica *acestei* matematici, cât și cu logica simbolică în genere. La explicitarea unora dintre aceste indicații a contribuit în mod substanțial și A. Heyting. Ele vor constitui, și în acest cadru, punctul de plecare al cercetării.

III. LOGICA MATEMATICII INTUIȚIONISTE (TEORIA INTUITIVĂ)

a) *Repere brouweriene*

Brouwer este primul care a studiat în mod sistematic raportul dintre matematică și logica simbolică, pe care o numește de regulă logică. Făcînd distincție, după cum s-a menționat deja, între matematică și limbajul matematic, el consideră că ultimul apare numai pe o anumită treaptă din dezvoltarea matematicii, care ar trece prin mai multe „stadii”⁴⁸.

Primul stadiu, consideră Brouwer, îl constituie creația pură, intuitivă a sistemelor matematice. Ea este în fond aplicată și experimentată în viața de toate zilele. Problema o constituie sistematizarea experiențelor cotidiene. Acest lucru nu poate fi însă efectuat de către un singur om. Este necesară comunicarea rezultatelor obținute. *Al doilea stadiu* îl constituie „paralela lingvistică a matematicii: vorbirea și scrierea matematică”. S-ar putea considera că a fost imposibilă o evoluție alingvistică a matematicii, că ea a avut loc în procesul general al evoluției umane, care presupune și evoluția limbajului în genere și a celui matematic în special. Lucrurile nu stau însă tocmai așa. Limbajul matematic a apărut totuși mai târziu decît cel obișnuit. Multe activități de tip matematic au fost efectuate inițial și sînt încă efectuate la fel, fără conștiința lor matematică, ceea ce face imposibilă comunicarea. Cu toate acestea, se poate considera că stadiul „lingvistic” al matematicii a apărut totuși cu mult înainte de creația intuitivă a *sistemelor* matematice. Istoria matematicii și studiul civilizațiilor primitive dovedesc faptul incontestabil că limbajul matematic scris, mai precis *scrijelat* a fost anterior celui vorbit. Apoi limbajul matematic vorbit a fost din nou înlocuit cu unul scris,

⁴⁸ Cf. Brouwer, *Over de grondslagen...*, pp. 173—175.

ajungându-se astăzi la imposibilitatea practică a matematicienilor de a mai comunica operații complexe prin voce.

Al treilea stadiu de dezvoltare a matematicii este unul lingvistic. Acum limbajul devine el însuși obiect de studiu. Este vorba totuși de o „cercetare matematică a limbajului”. Mai precis, acum are loc dezvoltarea matematicii favorizată de introducerea semnelor hieroglice, care simplifică și sistematizează activitatea pur matematică. „Construcțiile lingvistice sînt aici însoțitoarele lingvistice ale construcțiilor matematice”. În acest stadiu apare posibilitatea construcțiilor lingvistice pe baza unor principii logice.

În stadiul patru apare logica, drept sistem abstract în care nu mai contează semnificația principiilor logice descoperite în stadiul anterior. Acesta poate fi considerat drept un sistem matematic de *ordinul doi*, care coincide cu o logică matematică neformalizată. *Stadiul cinci* reprezintă introducerea limbajului *simbolic*, deci constituirea propriu-zisă a logicii matematice sau studiul simbolic al matematicii de *ordinul doi* (Peano, Russell). *Stadiul șase* reprezintă studiul *matematic* al limbajului simbolic (Hilbert). Apare deci o matematică de *ordinul trei*. *Stadiul șapte* ar însemna introducerea unui *symbolism* în care să se facă abstracție de semnificația matematicii de *ordinul trei*. *Stadiul opt* ar însemna studiul *matematic* al limbajului simbolic care face abstracție de semnificația matematicii de *ordinul trei*, ceea ce ar constitui o matematică de *ordinul patru* ș.a.m.d.

De aici urmează că singurul stadiu pur al matematicii este primul. El reprezintă matematica propriu-zisă, intuïtionistă. Toate celelalte sînt determinate de cerințele matematicii pure, care nu depinde însă de nici una dintre acestea. Stadiul doi se dovedește indispensabil pentru comunicarea și memorarea rezultatelor matematice obținute. El prezintă deci un *interes practic* pentru intuïtionist. Interesant este, din acest punct de vedere, și stadiul al treilea, respectiv studiul limbajului matematic, ca *însoțitor* al construcțiilor matematice și *numai în această calitate*. Acest studiu pune în evidență *specificul formelor, operațiilor și principiilor* logice aplicabile în matematică.

Celelalte nivele, consideră Brouwer, nu prezintă interes pentru intuïtionist. Aceasta nu înseamnă că ele trebuie să fie infirmate, ci înseamnă că trebuie să fie „așezate la locul lor”. În primul rînd, matematica pură nu trebuie confundată cu matematica de *ordinul doi* (cum fac logiciștii) sau cu cea de *ordinul trei* (cum fac formalistii). În al doilea rînd, rezultatele obținute în ordinele superioare ale matematicii nu trebuie socotite rezultate ale matematicii pure. Matematica

pură nu are nimic de câștigat de pe urma lor. În schimb, logica matematică și toate celelalte „matematici” nu numai că pornesc de la matematica pură, dar trebuie să revină în permanență la ea.

Prin „logică a matematicii intuiționiste” se vor înțelege deci numai aspectele logice ale stadiilor doi și trei din dezvoltarea matematicii. Logica matematicii intuiționiste nu este „o logică a matematicii” în genere. Această ultimă accepție coincide în cele din urmă cu aceea de logică simbolică, deoarece prin „matematică în genere” se pot înțelege și „matematicile” de ordin superior.

Aparținând stadiilor doi și trei logica matematicii intuiționiste este *posterioră* matematicii pure (stadiul întâi).

Ideea că matematica pură este independentă de logică în genere a fost subliniată adesea de către preintuiționiști. „Există, spunea Poincaré, o realitate mai subtilă, care determină entitățile matematice, și care este altceva decât logica”⁴⁹. Faptul că logica matematicii în genere presupune matematica pură a fost de asemenea cunoscut⁵⁰. Dar preintuiționiștii nu aveau încă ideea unei logici a matematicii pure *diferită* de logică. După schema lui Brouwer, ei au surprins doar raportul dintre stadiul întâi și stadiul patru.

Analizînd pe larg raportul dintre stadiul întâi și stadiul doi, Brouwer ajunge la câteva concluzii demne de menționat. Conform solipsismului său, el consideră că stadiul întâi, respectiv matematica pură, aparține subiectului singular, pe cînd stadiul doi (limbajul matematic) este un rezultat al „activității oamenilor sociali”⁵¹. El constă în acel „paralelism matematico-lingvistic” în cadrul căruia fiecărei entități matematice îi este coordonat un semn lingvistic. Limbajul matematic poate fi utilizat ulterior și de către „omu! singular”, în sprijinul memoriei. Este vorba în special de limbajul scris.

Limbajul în genere este însă lipsit de exactitate și siguranță. „Deci, conchide Brouwer, nici pentru matematica pură nu există un limbaj sigur, adică un limbaj care să excludă înțelegerile greșite și care să ne ferească de erori. . . „Limbajul se dovedește însă (în stadiul trei) obiectul de studiu a ceea ce a fost numit „logica matematicii intuiționiste”. Aceasta înseamnă, după cum va conchide Brouwer,

⁴⁹ H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris, 1909, p. 133.

⁵⁰ *Ibidem*, p. 177.

⁵¹ Brouwer, *Mathematik, Wissenschaft und Sprache*, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XXXVI, 1 Haft, 1929, p. 157.

că *logica nu este un instrument absolut sigur* ⁵², iar matematica trebuie să fie practică „fără a se recurge la limbaj sau logică” ⁵³.

Cerința lui Brouwer poate fi satisfăcută însă doar de către un subiect singular ideal. Platon avea și el ideea renunțării la limbaj, în special la cel scris. Aceasta pentru întărirea memoriei și a puterii de gândire. Deprinderea de a comunica rezultatele matematice și de a le utiliza în vederea obținerii altor rezultate face ca limbajul matematic, în speță cel scris, să devină *indispensabil*. Faptul că limbajul acesta poate să ducă la erori este firesc : *errare humanum est*. O demonstrație aritmetică, un calcul, poate fi gândit ireproșabil, ca act matematic pur, dar expresia lui cifrică poate să ducă la o greșeală care se perpetuează și care duce în cele din urmă la un calcul eronat. În acest caz, se poate vorbi despre o „demonstrație gândită corect” dar dublată de un „calcul numeric inexact”. Littlewood constată că de multe ori o gândire corectă este exprimată inexact, iar exprimările exacte pot masca concepții greșite ⁵⁴. St. Körner menționează, de altfel, faptul că matematicienii intuiționiști admit și „posibilitatea greșelilor care nu sînt de natură lingvistică” ⁵⁵. Acestea, cum este și firesc nu pot fi îndreptate cu mijloace logico-lingvistice. *Ergo*: utilizarea limbajului matematic poate să ducă la erori de exprimare, iar exactitatea limbajului matematic nu constituie garanția unei gândiri matematice corecte.

Acestea însă nu sînt motive suficiente pentru a se renunța la limbajul matematic și la logica acestui limbaj. În ce privește limbajul pur, deci treapta a doua, Brouwer face unele diferențieri. La început ar fi vorba de un limbaj viu U în care este exprimată matematica intuiționistă, apoi de un limbaj SU care desemnează simbolizarea limbajului U și în fine limbajul MSU cu ajutorul căruia se raționează asupra lui SU . MSU nu trebuie să fie esențialmente diferit de U ⁵⁶.

În privința sistemului simbolic, Heyting adaugă, precizînd punctul de vedere intuiționist, faptul că este imposibilă elaborarea unui SU care să descrie *complet* matematica intuiționistă ⁵⁷.

⁵² Brouwer, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proc. Xth intern. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1943, p. 1243.

⁵³ *Ibidem*, p. 1244.

⁵⁴ Cf. J. E. Littlewood, *Varietăți matematice*, Buc., 1969, p. 84.

⁵⁵ St. Körner, *Introducere în filozofia matematicii*, Buc., 1965, p. 181.

⁵⁶ Cf. A. Heyting, *Espace de Hilbert et intuitionnisme*, in „Les Méthodes formelles en axiomatique”, Paris, 1953, p. 59.

⁵⁷ A. Heyting, *Logique et intuitionnisme*, Actes du 2^e colloque intern. de logique math., Paris, 1954, p. 83.

Logica matematicii intuiționiste reprezintă deci studiul limbajului matematic. Conform diferențierilor introduse de Brouwer, ea ar conține trei compartimente: unul ar privi studiul limbajului U , altul studiul sistemului lingvistic SU și în fine studiul metalimbajului MSU , dar acesta coincide esențialmente cu U , și nu presupune o logică specială.

Logica matematicii intuiționiste presupune deci problema raportului dintre entitățile matematice și expresiile lor lingvistico-simbolice; apoi studiul relațiilor dintre expresiile lingvistice în funcție de relațiile dintre entitățile matematice și în fine problema principiilor logice în virtutea cărora se poate trece de la anumite relații dintre expresii lingvistice la alte relații asemănătoare.

b) *Entități matematice, constante și variabile*

„Paralelismul matematico-lingvistic” presupune elaborarea unui limbaj, astfel încît, fiecărei entități matematice să-i corespundă un semn lingvistic. Referindu-ne la șirul numerelor naturale, primul pas îl constituie construcția lui intuitivă, pur matematică, respectiv construcția primelor numere. Urmează apoi exprimarea lingvistică *verbală* a numerelor construite: *unu, doi, trei...* Exprimarea *înscriis* a aceluiași cuvinte poate să fie alfabetică sau hieroglică. În ultimul caz se obțin chiar cifrele: 1, 2, 3, ... În cazul scrierii alfabetice apar cuvinte scrise intermediare: „unu”, „doi”, „trei”... Istoric a apărut mai întîi scrierea hieroglică provenită din scrijelare. Diferența dintre expresiile *in voce* și *in scripto* nu este neglijabilă, nici în genere și nici în matematici. În matematici se poate considera că introducerea hierogliferilor (expresii *in scripto*) a fost chiar esențială pentru dezvoltarea ulterioară. Cu toate acestea, în contextul lucrării de față, diferența nu aduce nimic în plus. Important este aici faptul că *cifrele* (denumite verbal, scrise cu litere sau hieroglicate, respectiv 1, 2, 3, ...) nu sînt identice cu *entitățile matematice mentale* pe care le exprimă.

Este demn de menționat faptul că, din punct de vedere intuiționist, cifrele simple, ca 1, 2, 3, ..., cifrele legate prin semne de operație, ca $1 + 2$, 1×2 , sau cifrele care alcătuiesc ceea ce se numește de regulă o propoziție matematică, ca $1 + 2 = 3$, se consideră că exprimă în egală măsură „adevăruri”. Aceasta deoarece fiecare dintre ele exprimă rezultate ale „experiențelor prezente și trecute

ale conștiinței”⁵⁸. Adevărul, după Brouwer, nu rezidă în confruntarea unei expresii lingvistice cu un fapt matematic, ci în construcția efectivă a faptului respectiv. În acest sens, cifrele simple, exprimă rezultate ale intuiției, exprimă entități matematice sau „adevăruri”, ca și operațiile cu aceste cifre.

Adevărul ține de activitatea matematică propriu-zisă, de construcția intuitivă a entităților matematice. Rolul limbajului matematic este acela de a exprima, *mai mult sau mai puțin exact*, adevărul matematic.

Există, prin urmare, o primă treaptă (a) constituită din entități matematice mentale și operații cu astfel de entități și o treaptă (b) constituită din expresii lingvistice. Notînd cu $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$ expresiile lingvistice care desemnează entități determinate și cu $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ expresiile lingvistice care desemnează operații determinate cu aceste entități, obținem ceea ce s-ar putea numi *constantele intuiționiste*. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$ vor fi numite *constante individuale*, iar $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ *constante propoziționale*, cu toate că, din punct de vedere intuiționist, ambele tipuri de constante exprimă „adevăruri” cu același statut existențial.

Situația este evident diferită de aceea obișnuită în logica simbolică, în care este presupusă existența *prealabilă* a obiectelor individuale asupra cărora *ulterior* se operează. În logica obișnuită adevărul apare numai la nivel propozițional, relația dintre un lucru individual și expresia lui nepunînd în joc valoarea de adevăr. Intuiționistic vorbind, adevărul trebuie să fie *anterior* expresiei lingvistice, deci atît constantelor individuale cît și a celor propoziționale.

Nu trebuie uitat, și acesta este un lucru fundamental, că adevărul, în acest caz, este *adevărul matematic*. Dacă nu se admite existența anterioară a adevărului matematic față de expresia lui lingvistică, atunci sînt încălcate primele două teze intuiționiste. Matematica este o activitate independentă de limbaj, dar „obiectele” ei nu sînt date în prealabil, ca existînd undeva, ci se constituie în mintea subiectului creator, în urma unei activități nelingvistice, drept entități matematice și, în același timp, drept adevăruri. Din această cauză, o constantă individuală intuiționistă desemnează, ca și o constantă propozițională *rezultatul unei activități mentale*. Procesul intuitiv prin care este construită entitatea matematică exprimată prin cifra

⁵⁸ L. E. J. Brouwer, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proc. Xth intern. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, p. 1243.

„3” nu este cu nimic mai simplu decât procesul intuitiv prin care este construită operația matematică exprimată prin „ $2 + 1 = 3$ ”.

Distincția pe baza valorii de adevăr a constantelor individuale de cele propoziționale nu este de tip intuiționist și nu poate să aibă nici o semnificație intuiționistă. Atît constantele individuale cît și constantele propoziționale *exprimă* în logica intuiționistă adevăruri matematice și *numai* adevăruri matematice, dar ele în sine *nu sînt nici adevărate și nici false*.

Singura modalitate prin care poate fi marcată intuiționistic deosebirea dintre constantele individuale și cele propoziționale o constituie faptul că primele exprimă adevăruri *implicite* sau subînțelese, pe cînd ultimele exprimă aceleași adevăruri în mod *explicit*. Altfel spus, constantele propoziționale exprimă aceleași adevăruri ca și cele individuale, marcînd în plus și *anumite* aspecte legate de procesul *constituirii* acestor adevăruri.

O altă treaptă (c) este aceea a *generalizării* constantelor intuiționiste, respectiv a introducerii unor *semne ale semnelor introduse deja*, deci depășirea „paralelismului lingvistico-matematic”, care ține de stadiul al doilea al matematicii. Pe treapta (c) obiectul investigației îl constituie *limbajul matematic* (stadiul al treilea). *Variabila intuiționistă individuală* desemnează *orice* constantă intuiționistă individuală. Cu a_i , de exemplu, putem nota orice număr natural par, cu b_i orice număr natural impar. $a_i + \alpha_i = b_i$ sau $b_i + \alpha_i = a_i$ sînt expresii matematice alcătuite din constante și variabile intuiționiste individuale (în acest caz $\alpha_i = 1$). Variabilele intuiționiste individuale vor fi notate cu $a_i, b_i, c_i, \dots$. *Variabila intuiționistă propozițională* (explicită). Aceste variabile vor fi notate cu $a, b, c, \dots$

Și la acest nivel trebuie marcat specificul intuiționist. Variabila intuiționistă (atît cea individuală cît și cea propozițională) generalizează constantele intuiționiste (individuale sau propoziționale). Luată independent, variabila individuală se citește „oricare ar fi constanta individuală”, iar variabila propozițională se citește „oricare ar fi constanta propozițională”. Exemplul de mai sus, respectiv $a_i + \alpha_i = b_i$, în care a_i desemnează orice număr par, b_i orice număr impar, iar α_i unitatea, se citește „orice număr par căruia i se adaugă o unitate devine un număr impar.”

Necesitatea introducerii variabilelor implicite este evidentă în raționamentele matematice generale, referitoare la fiecare element

al unei clase de entități matematice. Necesitatea variabilelor explicite rezidă în raționamentele care poartă *asupra* constantelor explicite.

Paralelismul matematico-lingvistic impune transcrierea în simboluri a construcțiilor matematice efective, respectiv a adevărilor matematice. Pentru fiecare adevăr matematic trebuie utilizată o anumită constantă. În limbajul logicii tradiționale s-ar putea spune că *toate constantele intuiționiste sînt adevărate*. Dar același lucru poate fi spus și despre variabilele intuiționiste, deoarece ele generalizează *numai* constantele intuiționiste, deci numai constante adevărate. Terminologia aceasta nu este însă adecvată punctului de vedere intuiționist, căci constantele intuiționiste *nu sînt* adevărate, ci *exprimă* adevăruri ș.a.m.d.

Acest lucru nu se datorește însă numai paralelismului lingvistico-matematic, deci conformității cu primele teze intuiționiste, ci și specificului matematicii intuiționiste, deci conformității cu teza (VI). Dovedindu-se că la nivelul matematicii pure nu mai sînt universal valabile legi ca *tertium non datur* și *negatio duplex*, care stau la baza demonstrațiilor *indirecte*, acestea din urmă nu mai sînt utilizate. Situația se explică prin aceea că o demonstrație indirectă nu are valoare, din punct de vedere intuiționist, decît atunci cînd poate fi dublată de una directă. Dar, fiind realmente dublată de una directă (singura certă, care presupune construcția matematică efectivă), demonstrația indirectă se dovedește *inutilă*, ca și falsitățile matematice pe care le presupune. Însă, odată cu excluderea demonstrațiilor indirecte sînt excluse din matematica intuiționistă și constantele și variabilele *false* sau *presupus false*, care desemnează falsități matematice și care apar, de regulă, în matematica clasică.

Paralelismul matematico-lingvistic, conform primelor teze intuiționiste plus teza (VI), poate fi redat deci prin trei trepte: (a) treapta adevărilor matematice (construcții matematice efective, independente de limbaj); (b) treapta constantelor intuiționiste individuale sau propoziționale (implicite sau explicite), care exprimă toate adevăruri matematice și (c) treapta variabilelor intuiționiste individuale sau propoziționale, care generalizează constante intuiționiste. Sensul trecerii este (a) $\rightsquigarrow$ (b) $\rightsquigarrow$ (c).

Conform schemei (a) $\rightsquigarrow$ (b) $\rightsquigarrow$ (c), discuțiile referitoare la valorile de adevăr utilizabile în logica intuiționistă își găsesc o rezolvare *ad oculos*. În acest cadru, nu numai presuposițiile lui Gonseth, Barzin și Errera, care încercau introducerea unei valori terțe, se dovedesc lipsite de temei, dar și cele ale lui Glivenko, care operează cu adevărul și falsul fără nici o restricție.

Mult mai apropiată de restricțiile pe care le implică schema (a) $\rightsquigarrow$ (b) $\rightsquigarrow$ (c) este concepția matematicianului român Octav Onicescu. El consideră, într-o manieră apropiată de cea intuționistă, că obiectele matematice sînt rezultatul unei „experiențe mentale,”⁵⁹ sînt „abstracții de ordinul doi”⁶⁰. O teorie științifică în genere, și în special una matematică este un sistem complex alcătuit din raționamente care poartă asupra unor astfel de obiecte. Problema obținerii lor nu ține de cadrul teoriei științifice. Aceasta conține numai ansamblul propozițiilor *adevărate* care pot fi obținute pe baza regulilor de raționare. Ceea ce, consideră Onicescu, „ne obligă să limităm cîmpul acestei logici la o singură valoare, aceea a adevărului”⁶¹.

Concepția lui Onicescu se deosebește însă de cea intuționistă prin aceea că presupune adevărul în contextul expresiilor lingvistice. Ea apare drept un revers clasic al schemei (a) $\rightsquigarrow$ (b) $\rightsquigarrow$ (c) în care (a) își menține o oarecare semnificație ontologică, deși Onicescu nu identifică obiectele matematice cu cele concrete, iar (b) realizează adevărul prin confruntare cu (a).

Dar schema (a) $\rightsquigarrow$ (b) $\rightsquigarrow$ (c), pe care o putem numi *calea directă de realizare a paralelismului matematico-lingvistic*, determină apariția unor expresii, mai mult sau mai puțin complexe, care nu mai corespund întru totul adevărilor matematice.

c) Așertarea și atestarea constantelor propoziționale

Urmînd calea (a) $\rightsquigarrow$ (b) $\rightsquigarrow$ (c), se constată că pot fi gîndite nu numai operații matematice exprimabile prin $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, ci și anumite operații, de alt tip, care poartă *asupra* operațiilor exprimabile prin $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Se constată, de exemplu, că efectuînd construcția intuitivă exprimată prin „ $1 + 2$ ” (α) este efectuată în același timp și construcția intuitivă „ $2 + 1$ ” (β). Matematic apare aici relația de egalitate ($=$), iar operația intuitivă este exprimată prin „ $1 + 2 = 2 + 1$ ”. Introducînd semnul „ $=$ ” și între α și β obținem „ $\alpha = \beta$ ”. Diferența dintre „ $1 + 2 = 2 + 1$ ” și „ $\alpha = \beta$ ” este numai de notatie, căci $\alpha = {}_D 1 + 2$ și $\beta = {}_D 2 + 1$. Exprimînd în cuvinte procesul prin

⁵⁹ O. Onicescu, *Principes de logique et de philosophie mathématique*, Buc., 1971, p. 10.

⁶⁰ *Ibidem*, p. 11.

⁶¹ *Ibidem*, p. 7.

care a fost obținut „ $\alpha = \beta$ ”, ajungem însă la următoarea formulare : „Dacă $\alpha =_{df} 1 + 2$ și $\beta =_{df} 2 + 1$, atunci $\alpha = \beta$ ”, în care apar cuvintele „dacă... atunci” și cuvântul „și”. Aceste cuvinte exprimă altceva decât operațiile pur aritmetice, care au loc numai între entități exprimabile prin cifre.

Din punctul de vedere al lui Brouwer, este evident că aici ne găsim în al treilea stadiu al dezvoltării matematicii. Într-adevăr, aici limbajul matematic a devenit obiect de studiu, mai precis relațiile dintre expresiile lingvistice de treapta a doua. Aceste relații numite operații logice pot fi simbolizate. Atunci din

$$(1) \quad \text{„Dacă } \alpha =_{df} 1 + 2 \text{ și } \beta =_{df} 2 + 1, \text{ atunci } \alpha = \beta\text{”}$$

se obține

$$(2) \quad ((\alpha =_{df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{df} 2 + 1)) \supset (\alpha = \beta).$$

Generalizând expresia (2), respectiv introducând variabile în locul expresiilor constante care apar în parantezele din (2), obținem

$$(3) \quad (a \wedge b) \supset c$$

Între (2) și (3) este însă o mare diferență. Expresia (2) reprezintă relații între expresii lingvistice determinate, adică între expresii care alcătuiesc „paralelismul matematico-lingvistic” (lui $1 + 2$ îi corespunde α , lui $2 + 1$ îi corespunde β). Variabilelor a, b și c din (3) le corespunde însă orice expresie constantă. În această situație, din (3) se poate obține, de exemplu, expresia

$$(4) \quad ((\alpha =_{df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{df} 1 + 3)) \supset (\alpha = \beta).$$

Expresia (4) nu mai poate fi însă obținută prin exprimarea unei operații matematice intuitive, respectiv pe cale directă, căci în acest caz s-ar obține expresia

$$(5) \quad ((\alpha =_{df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{df} 1 + 3)) \supset (\alpha \neq \beta).$$

Obținerea operațiilor de tip (3) este perfect legitimă, deoarece se face pe cale directă, dar, odată obținute, interpretarea lor implică însă și legitimitatea unei căi inverse $(c) \multimap (b) \multimap (a)$.

Expresiile de tip (c), interpretabile pe cale inversă, pot fi mai mult sau mai puțin complexe. Cazul cel mai simplu este acela al simplei variabile propoziționale. Variabila individuală nu duce la dificultăți, deoarece paralelismul matematico-lingvistic este, în cazul ei, biunivoc prin definiție. O variabilă individuală a_i se obține prin generalizarea unui domeniu de constante individuale $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$ și poate fi înlocuită numai cu astfel de constante. Deși situația ar trebui să fie aceeași și pentru variabila propozițională, căci și aceasta se obține prin generalizarea constantelor propoziționale, care pe cale directă exprimă adevăruri matematice și numai adevăruri matematice, pe cale inversă nu se mai poate respecta corespondența, deoarece domeniul constantelor propoziționale nu poate fi redus la constantele propoziționale obținute deja și nici dezvoltat pe baza unor metode speciale, ca în cazul constantelor individuale. Fînd vorba de exemplu de o succesiune oarecare care înaintază liber $a_i, b_i, c_i, \dots$, de un mediu al devenirii libere, deci un caz limită de construcție a unei succesiuni numerice, putem înlocui succesiv variabilele individuale $a_i, b_i, c_i, \dots$ prin alegeri mai mult sau mai puțin libere de entități matematice. Să zicem că pentru a_i libertatea de alegere este restrînsă la numere pare între 1 și 10, pentru b_i la numere pare între 10 și 20, iar pentru c_i la numere impare între 1 și 10. Este evident că, în acest caz, există, chiar fără a continua alegerile succesive, multe variante care pot satisface succesiunea de variabile a_i, b_i, c_i . Oricare ar fi această variantă, obținută prin alegeri libere, ea va constitui o succesiune autentică.

Această metodă nu poate fi aplicată în cazul variabilelor propoziționale. Să zicem că este vorba de variabila a , care poate fi înlocuită restrictiv cu adunări de numere întregi diferite între 1 și 10. În cazul acesta, chiar atît de limitat, constantele propoziționale obținute, care prin restricție vor avea structura $\alpha_i + \beta_i = \gamma_i$, în care $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sînt numere întregi diferite, vor alcătui o succesiune de expresii dintre care numai o mică parte va corespunde unor operații matematice efective. Situația este cu atît mai evidentă în cadrul expresiilor complexe.

Aceasta înseamnă că admiterea schemei inverse, respectiv (c) $\rightsquigarrow$ (b) $\rightsquigarrow$ (a) pune într-o altă lumină discuțiile referitoare la valorile de adevăr utilizabile în logica intuiționistă.

Pentru moment interesează însă constantele propoziționale obținute pe cale directă și cele obținute pe cale inversă, căroră *le corespund* adevăruri matematice. Deoarece primele nu au fost numite

adevărate, nici ultimele nu pot fi astfel calificate. Primele exprimă *direct* adevăruri matematice, ultimele se dovedesc prin verificare, deci *invers*, că exprimă adevăruri matematice. Este evident că *aceeași* constantă propozițională, corespunzătoare unui adevăr matematic, poate fi obținută pe ambele căi și că nu există constantă propozițională de acest tip care să nu poată fi obținută pe ambele căi. Ceea ce diferă este doar *modalitatea* obținerii. Or, această modalitate ține totuși de scheme *diferite* care determină la rindul lor orientări diferite în logica intuiționistă. Din această cauză, cele două modalități trebuie distinse cu precizie.

O constantă propozițională obținută pe cale directă *asertează* un adevăr matematic, îl afirmă, îl *comunică*, îl *exprimă*. Constantele propoziționale obținute pe cale inversă sînt *atestare*, sînt *confirmate* drept expresii corespunzătoare unor adevăruri matematice sau altfel spus *se dovedesc corespunzătoare acestora numai prin verificare*. Constantele propoziționale obținute pe cale directă vor fi numite *expresii asertate* sau *asertiuni*, cele obținute pe cale inversă *expresii atestate*.

Din moment ce asertiunile și expresiile atestate coincid, este evident că admiterea lor, din punct de vedere intuiționist, este lafel de îndreptățită, în ciuda faptului că au fost obținute pe căi diferite. Expresiile atestate, ca și asertiunile, corespund adevărilor matematice și numai acestora, respectă deci condiția paralelismului matematico-lingvistic. În plus, fiind expresii care corespund adevărilor matematice și numai acestora, ele nu permit apariția nici unui raționament în care să fie utilizate expresii ale falsității sau principii ca *tertium non datur* etc. Deci corespund și restricțiilor impuse de teza (VI).

Problema raportului dintre asertarea și atestarea constantelor propoziționale a fost dezbătută pe larg în cadrul discuțiilor referitoare la aspectele comprehensive ale logicii intuiționiste. Ce-i drept, planurile au fost adesea confundate, dar a fost remarcat de la început faptul că, din punct de vedere intuiționist, o constantă propozițională nu poate să apară pur și simplu, ca un enunț oarecare. Ea necesită sau o *afirmare* sau o *confirmare*.

P. Lévy, urmîndu-i pe Barzin și Errera⁶² precizează pentru prima dată faptul că trebuie să nu se confunde „simpla enunțare a unei expresii cu afirmarea ei brouweriană”⁶³. Pentru a marca dis-

⁶² Cf. M. Barzin & A. Errera, *Sur la logique de M. Brouwer*, p. 56.

⁶³ P. Lévy, *Logique classique, logique brouwerienne et logique mixte*, p. 256 și p. 266.

tinția, el introduce semnul „+” în fața expresiilor atestate, pe care le numește „adevărate-Br” sau „demonstrabile”⁶⁴. Astfel: α , β , γ , ..., sînt simple expresii, iar $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, ... sînt expresii atestate. Terminologia utilizată de Lévy ar putea sugera și faptul că expresiile în discuție ar fi aserțiuni. Însuși termenul de „afirmare” sugerează așa ceva. În realitate, pe Lévy nu-l interesează obținerea constantelor pe calea directă, ci confirmarea lor prin demonstrație. Distincția vizează deci numai deosebirea constantei propoziționale în accepție intuizionistă de simplul enunț din logica obișnuită.

Heyting preia distincția semnalată de Lévy. El menționează că o expresie oarecare α „exprimă o problemă”⁶⁵. În logica obișnuită atestarea lui α presupune confruntarea cu o „natură transcendentă”, ceea ce nu poate să admită un intuizionist. Atestarea intuizionistă, afirmarea brouweriană, cum zice Heyting, înseamnă *demonstrarea* expresiei α , mai precis „demonstrarea prin construcție”⁶⁶. Este evident că Heyting vorbește în alți termeni despre procesul atestării. Și el face distincția între simpla expresie α și expresia atestată pe care o notează $\vdash \alpha$, dar el nu insistă numai pe această distincție, care marchează specificul constantei propoziționale intuizioniste față de constanta din logica obișnuită, ci și pe modalitatea pur intuizionistă a atestării prin construcție *intuitivă*, deci prin construcția adevărului matematic, nu printr-o simplă demonstrație, cum ar fi de exemplu una indirectă, bazată pe *tertium non datur*. Heyting nu vorbește explicit despre aserțiune și nu introduce deci nici un semn special diferit de cel al atestării.

Distincția este reluată de P. Destouches-Février⁶⁷ care separă expresiile simple (construcții care urmează să fie realizate) de „construcțiile realizate sau reușite”. Pentru ultimele introduce semnul „ $\simeq$ ”. Aici însă distincția apare, deși nu într-un totu explicit, între o expresie simplă, care urmează să fie *atestată* și o expresie *asertată*. Distincția nu este evidentă datorită faptului că Destouches-Février identifică expresiile cu construcțiile. În mod normal nu se poate vorbi despre o „construcție” neconstruită încă, ci despre o expresie căreia nu-i corespunde încă nici o construcție.

Notăția lui Lévy nu poate fi utilizată, căci ar da naștere la confuzii între atestare și semnul adunării. Cea a lui Heyting este de ase-

⁶⁴ *Ibidem*, p. 257.

⁶⁵ A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste* p. 958, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1930.

⁶⁶ *Ibidem*, p. 959.

⁶⁷ P. Destouches-Février, *Le calcul des constructions*, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, Paris, 227, 1948, p. 1192.

menea necorespunzătoare, ea fiind utilizată de obicei pentru expresii care conțin variabile, în genere pentru expresii complexe, tautologice. În plus, ea ar sugera și accepția formalistă căci semnul „ $\vdash$ ” se pune de obicei în fața unei expresii care a fost dedusă din axiome, în fața unei teoreme logice care poate să fie lipsită de semnificație matematică. În cazul nostru este vorba însă de expresii alcătuite din constante, care sînt atestate *după* ce au fost deduse, dar *nu deoarece* au fost deduse. Semnul „ R ” este incomod și nu marchează deosebirea dintre asertare și atestare. Din aceste motive introducem o notație specială. Semnul „ $\vdash$ ” stă în fața unei expresii asertate, iar semnul „ $\vdash_*$ ” în fața unei expresii atestate. Ambele semne pot fi puse și în fața unor expresii complexe, cum ar fi (2) sau (5), și în fața unor expresii simple ca α . În cazul în care α prescurtează expresia „ $1 + 2 = 3$ ” care exprimă construcția mentală UNU PLUS DOI ESTE EGAL CU TREI, atunci scriem „ $\vdash_* \alpha$ ”, deci asertăm α . Dacă α prescurtează, să zicem, expresia „ $1279 + 320 = 1599$ ”, atunci verificăm operația și dacă ea va corespunde unei construcții aritmetice, o atestăm, respectiv scriem „ $\vdash \alpha$ ”.

d) Negarea constantelor propoziționale

Mergînd pe cale intuiționistă directă, de la construcția mentală la expresia lingvistică, este evident că se ajunge *numai* la constante asertate. Dacă notăm cu majuscule latine construcțiile mentale, cu majuscule gotice expresiile cifrice și cu litere mici grecești constantele propoziționale, obținem următoarea relație

$$(6) \quad (A) \Rightarrow (U) \Rightarrow (\vdash_* \alpha).$$

Dacă se pornește invers, de la o constantă propozițională oarecare dată sau de la o expresie dată care conține constante propoziționale la expresia cifrică și la construcția mentală, apar însă *două* situații: *una* în care se ajunge la o construcție mentală, ceea ce implică atestarea constantei propoziționale și *alta* în care nu se ajunge la o construcție mentală. Prima situație poate fi redată prin formula

$$(7) \quad [(\alpha) \Rightarrow (U) \Rightarrow (A)] \Rightarrow (\vdash_* \alpha).$$

Situația a doua presupune la rândul ei două cazuri: unul în care poate fi realizată o construcție mentală corespunzătoare unei alte expresii constante care o *contrazice* pe cea în discuție — în acest caz expresia constantă în discuție *este negată* și altul în care nu poate fi realizată nici o construcție mentală corespunzătoare unei alte expresii constante care să o *contrazică* pe cea în discuție — în acest caz expresia este nedecidabilă *vi materiae*.

Primul caz poate fi redat astfel:

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} (\alpha) \rightsquigarrow (\mathcal{U}) \rightsquigarrow (-) & & (\neg \alpha) \\ \downarrow & & \updownarrow \\ (B) \rightsquigarrow (\mathcal{B}) \rightsquigarrow (\perp, \beta) \end{array}$$

Semnul „ $\neg$ ” reprezintă negația intuiționistă, iar cele două săgeți contrare reprezintă contradicția.

Al doilea caz poate fi redat astfel:

$$(9) \quad [(\alpha) \rightsquigarrow (\mathcal{U}) \rightsquigarrow (-)] \rightsquigarrow (\alpha^0)$$

(α^0) exprimă faptul că lui (α) care prescurtează expresia ($\mathcal{U}$) nu-i corespunde nici o construcție (A) ca în cazul (7) și nici o construcție (B) a cărei expresie prescurtată (β) să *contrazică* (α) ca în cazul (8).

Trebuie remarcat, în primul rând, faptul că formulele (6) — (9) *nu presupun* nici o referință la valorile de adevăr. Aceasta înseamnă că nici negația constantelor propoziționale, în acest context, nu are legătură cu valorile de adevăr. Mai trebuie remarcat, pe baza distincțiilor anterioare, faptul că expresia constantă negată ($\neg \alpha$) se obține prin intermediul unei aserțiuni ($\perp, \beta$) care o *contrazice*; expresia negată nu poate fi obținută prin atestare. Acesta este un lucru esențial, asupra căruia se va reveni. De remarcat, pentru moment, este faptul că, neputînd fi atestată, constantei propoziționale negate *nu-i corespunde nici un adevăr matematic*. Acesta este însă numai punctul de vedere al lui Brouwer. El numește negația de acest tip *absurditate*, iar metoda prin care este obținută, respectiv formula (8), *reducere la absurditate*. Reducerea la absurditate nu trebuie confundată cu demonstrația indirectă sau demonstrația prin absurd. În demonstrația prin absurd se pleacă de la o alternativă de tipul ($\alpha \vee \sim \alpha$) și prin ($\sim \sim \alpha$) se demonstrează (α). În reducerea la absurditate, care poate fi numită, pentru a evita confuziile, *reducere la negație*, se pornește de la o expresie (α) și printr-o *altă* expresie (β) care este

asertată ($\perp, \beta$) și care o contrazice pe (α) se ajunge la negarea lui α , respectiv la ($\neg \alpha$). Demonstrația prin absurd se bazează pe *tertium non datur*, pe cînd reducerea la negație pe *legea contradicției*.

Demonstrația prin absurd presupune o *singură expresie* și anume α și se bazează pe un *joc valoric*: α și $\sim \alpha$ înseamnă α adevărat și α fals. Reducerea la negație presupune *două expresii diferite* α și β dintre care una, respectiv β , este asertată ($\perp, \beta$), iar cealaltă, respectiv α , este negată ($\neg \alpha$) în conformitate cu legea contradicției. Legea contradicției presupune *două expresii contradictorii*. Cea mai elementară cerință a contradicției este ca *cele două expresii să fie diferite*. Acest lucru este ignorat în logica matematică. Legea contradicției este redată simbolic prin $\sim(\alpha \& \sim \alpha)$ ceea ce înseamnă că nu se poate ca *una și aceeași expresie* să fie în același timp adevărată și falsă.

Cele de mai sus pot fi ilustrate cu exemple. Dacă α prescurtează „ $1 + 2 = 4$ ”, atunci lui „ $1 + 2 = 4$ ” nu-i corespunde nici o construcție mentală, deci α nu poate fi atestat, în schimb poate fi construit UNU PLUS DOI ESTE EGAL CU TREI, care este exprimat sau asertat prin „ $1 + 2 = 3$ ” și prescurtat prin $\perp, \beta$. Este evident că „ $1 + 2 = 4$ ” este diferit de „ $1 + 2 = 3$ ” și în același timp se *contrazice*, se exclud reciproc, ceea ce înseamnă că fiind admis (asertat) unul, trebuie respins (negat) celălalt. Însă β a fost asertat ($\perp, \beta$) deci α este negat ($\neg \alpha$). Ar fi incorect ca „ $1 + 2 = 4$ ” să fie prescurtat cu α , iar „ $1 + 2 = 3$ ” tot cu α , indiferent care dintre ele ar fi adevărat sau fals în sens obișnuit.

Același lucru se petrece și în cazul expresiilor constante complexe. Dacă notăm cu „ A ” expresia constantă complexă

$$(4) \quad ((\alpha = {}_{df} 1 + 2) \wedge (\beta = {}_{df} 1 + 3)) \supset (\alpha = \beta)$$

și cu „ B ” expresia constantă complexă

$$(5) \quad ((\alpha = {}_{df} 1 + 2) \wedge (\beta = {}_{df} 1 + 3)) \supset (\alpha \neq \beta)$$

care exprimă o construcție matematică intuïtivă, atunci asertăm B , respectiv ($\perp, B$) și negăm A , respectiv ($\neg A$).

Heyting nu subscie acestui punct de vedere și încearcă să justifice negația cu ajutorul așa-numitelor *construcții ipotetice*. Schema după care lucrează el este următoarea:

$$(8') \quad [(\alpha) \multimap (\mathcal{U}) \multimap (\emptyset)] \multimap (\neg \alpha).$$

Schema (8') arată faptul că negația lui α a fost obținută prin aceea că expresiei $\mathcal{U}$, pe care o prescurtează α , îi corespunde o construcție

ipotetică contradictorie ($\emptyset$). Se observă imediat că Heyting lucrează cu o singură expresie, respectiv α . El aplică aici principiul contradicției din logica matematică și este nevoit adesea să folosească termenii de „adevărat” și „fals”.

Exemplul lui Heyting este simplu: α prescurtează aici pe „ $2 + 2 = 5$ ”. El consideră că expresiei „ $2 + 2 = 5$ ” i-ar corespunde o construcție matematică în care nu se poate stabili o corespondență biunivocă între elementele lui „ $2 + 2$ ” și elementele lui „ 5 ”. Deoarece nu se poate stabili corespondența, se neagă α . Este evident că imposibilitatea de a stabili o corespondență presupune implicit imposibilitatea oricărei construcții reale. Ceea ce rămâne este „construcția ipotetică” sau „intenția unei construcții”.

Heyting însuși se referă și la soluția lui Brouwer⁶⁸, care îi opune lui „ $2 + 2 = 5$ ” pe „ $2 + 2 = 4$ ”, ceea ce exprimă într-adevăr o construcție matematică reală, a cărei expresie prescurtată contrazice, fără utilizarea valorilor de adevăr, expresia inițială.

Problema construcțiilor ipotetice este desigur discutabilă. În acest context, ea reprezintă o încercare de a simplifica teoria brouweriană a negației, fără a încălca principiile constructivismului. Negația, ca orice expresie, are nevoie, din punct de vedere intuitionist, de ceea ce van Dantzig numește „dovadă prin facere”. Dar, în acest sens, numai soluția lui Brouwer este autentică, deoarece presupune o construcție efectivă, o „facere” propriu-zisă.

Cu toate acestea, concepția lui Brouwer a fost abandonată în favoarea concepției lui Heyting, aceasta din urmă fiind la rîndul ei simplificată. Dealtfel, Heyting însuși prezintă adesea negația în mod simplificat, adică fără să mai facă apel la construcțiile ipotetice. El utilizează formulări ca: „negația lui α înseamnă « α implică contradicție»”⁶⁹ sau „presupunînd că ar fi dată soluția lui α , se obține o contradicție”⁷⁰ sau „O propoziție este falsă dacă duce la o contradicție: mai explicit, afirmăm negația unei propoziții α dacă am derivat o contradicție din presupunerea că α a fost demonstrată. Derivarea contradicției este o construcție matematică... putem nega α numai după ce am demonstrat că α este contradictorie”⁷¹. Se observă aici

⁶⁸ Cf. A. Heyting, *Remarque sur le constructivisme*, Logique et analyse, 3, 1960, p. 179.

⁶⁹ A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste*, p. 959.

⁷⁰ A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 17.

⁷¹ A. Heyting, *Intuitionism in mathematics*, in „Philosophy in the Mid-Century”, Firenze, 1958, p. 108.

faptul că Heyting identifică „falsul cu negația”, deși negația intuïționistă nu presupune valori de adevăr. În plus „derivarea contradicției este considerată o construcție” și se consideră că „ α este contradicțorie”, adică se contrazice pe sine. Această concepție a fost preluată de către formalisții neointuïționiști ca Lorenzen, Kleene, Troelstra ș.a. Negația s-a transformat în formula :

$$(10) \quad \neg \alpha =_{df} \alpha \rightarrow \perp$$

în care $\perp$ înseamnă falsul sau contradicția.

Ambele accepții ale negației sînt însă diferite de accepția obișnuită. Ele se deosebesc în primul rînd (accepția brouweriană) prin dispensarea de valorile adevăr și fals, iar în al doilea rînd (Heyting), prin identificarea negației cu falsul.

Identificarea negației cu falsul, poate să aibă drept consecință excluderea negației din logica intuïționistă. Ea este analogă excluderii falsului (à la Onicescu). Această poziție a fost susținută în mod consecvent și teoretizată de către matematicianul și filozoful olandez G.F.C. Griss.

Trebuie accentuat asupra faptului că independent de identificarea negației cu falsul poziția intuïționistă nu presupune, pînă în acest moment, necesitatea excluderii negației. Aceasta cu condiția admiterii ambelor căi (directă și inversă) de realizare a paralelismului matematico-lingvistic. Necesitatea schemei inverse a apărut drept o consecință firească a primei scheme . Într-adevăr, cu ajutorul primei scheme se ajunge de la entitățile matematice la constante propoziționale și apoi la variabile. Acestea, odată obținute, presupun implicit posibilitatea înlocuirii lor cu constante propoziționale și deci necesitatea unei căi inverse pe care să se poată ajunge la entitățile matematice. Iar pe cale inversă negația poate fi justificată à la Brouwer — fără identificarea ei cu falsul.

Cu toate acestea, deși ideea inițială a fost a lui Griss, iar acesta pornea de la identificarea negației cu falsul, au existat și alte puncte de vedere, în virtutea cărora negația trebuie exclusă, independent de identificarea ei cu falsul. De data aceasta condiția este *restrîngerea* paralelismului matematico-lingvistic la calea directă. Este vorba de așa-numita „poziție strict constructivă”, susținută de P. Destouches-Février ⁷². Excluderea schemei inverse implică într-adevăr și exclu-

⁷² P. Destouches-Février, *Le calcul des constructions*, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, Paris, 227, 1948, p. 1193.

derea negației, căci pe cale directă nu pot fi obținute decît aserțiuni (*id est* constante propoziționale asertate). Dar restricția este prea tare, deoarece renunțarea la calea inversă înseamnă implicit și *excluderea atestării*, respectiv a constantelor propoziționale, care, deși *nu au fost* obținute pe cale directă, *pot fi* obținute și pe cale directă. Altfel spus, înseamnă renunțarea la obținerea *prealabilă* a expresiilor și la verificarea lor *ulterioară*. Pentru a compensa acest neajuns, P. Destouches-Février consideră că este posibilă și elaborarea unei alte logici, tot în sens constructiv, dar *nu strict*. În această logică negația ar putea fi introdusă la Heyting, prin $\emptyset$, presupunîndu-se că $\emptyset$ sau contradicția „ar necesita și ea o construcție”. Dar nici în această situație nu s-ar obține decît o „logică pozitivă”, deoarece $\emptyset$ trebuie definită pozitiv ⁷³. Într-adevăr, admitînd că și contradicția ar fi o construcție, definiția $\emptyset =_{Df} (1 = 2)$ ar fi și ea pozitivă. Este demn de remarcat faptul că P. Destouches-Février, care, alături de „logica construcțiilor” = a aserțiunilor, deci fără negație și alături de logica pozitivă, a problemelor care urmează să fie rezolvate, menționează și o „logică a propozițiilor”, nu face nici un apel la valori de adevăr, nici măcar în legătură cu problemele controversate ale negației ⁷⁴.

Griss dimpotrivă pornește de la teza că „În matematică nu se poate vorbi de supoziții false” ⁷⁵. Acestea ar putea să apară, într-adevăr, dar nu în *matematică*, respectiv în matematica înțeleasă drept *știință teoretică*. „A pune problema și a căuta soluții sînt activități prematematice” ⁷⁶. Numai la acest nivel pot fi puse probleme false, respectiv pot fi enunțate constante propoziționale cărora să nu le corespundă nici o construcție matematică. Griss nu este însă un adversar al căii inverse de obținere a paralelismului matematico-lingvistic. Aceasta tocmai datorită faptului că el identifică negația cu falsul, adică are un criteriu pe baza căruia poate să *selecteze* constantele propoziționale obținute pe cale inversă. Acest criteriu îl constituie *raționamentele speciale ale matematicii intuiționiste*, respectiv conformitatea cu teza (VI). Pe baza acestor raționamente, în care nu se operează cu *tertium non datur* și nici cu *negatio duplex*,

⁷³ P. Destouches-Février, *Logique de l'intuitionnisme sans négation et logique de l'intuitionnisme positif*, Comptes rendus..., Paris, 226, 1948, p. 39.

⁷⁴ P. Destouches-Février, *Sur l'intuitionnisme et la conception strictement constructive*, *Indagationes mathematicae*, XIII, 1951, p. 80.

⁷⁵ G. F. C. Griss, *Mathématique, mystique et philosophie*, in „Mélanges philosophiques”, Amsterdam, 1948, p. 162.

⁷⁶ G. F. C. Griss, *Logique des mathématiques intuitionnistes sans négation*, Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sc., Paris, 227, 1948, p. 946.

pot fi obținute constante propoziționale sau combinații ale acestora, care în mod evident nu sînt aserțiuni; ele pot fi oricînd atestate, dar niciodată negate. Numai în cazul în care ar fi utilizate *altfel* de raționamente decît cele permise în matematica intuiționistă, s-ar putea ajunge la enunțuri care ar trebui negate. „Negația trebuie suprimată din aceleași motive din care este suprimat terțul exclus”⁷⁷.

Pentru a-și susține punctul de vedere, Griss întreprinde o critică serioasă a concepției lui Heyting. El consideră, spre deosebire de P. Destouches-Février, că introducerea negației prin $\emptyset$ nu este *deloc* constructivă, nici măcar în sensul nestrict al lui Heyting însuși. Griss nu ia însă în considerație poziția lui Brouwer în problema negației, care este totuși constructivă. El constată însă că în lucrările lui Brouwer, atît în cele pur matematice cît și în cele teoretice, nu este utilizată negație. În cele pur matematice ea nu poate să apară datorită restricțiilor prevăzute în teza (VI), iar în cele teoretice nu joacă nici un rol, căci intuiția matematică este un act pozitiv, de construcție efectivă a entităților matematice⁷⁸.

Există prin urmare două poziții intuiționiste în interpretarea constantelor propoziționale negate. Una în care negația este admisibilă, cu cele două variante (a lui Brouwer și a lui Heyting) și alta în care negația este respinsă, cu cele două variante amintite mai sus.

Din punct de vedere al paralelismului matematico-lingvistic, cea mai îndreptățită pare ultima poziție. Într-adevăr, fie că negația este identificată cu contradicția, fie că este identificată cu falsul, ei nu îi corespunde nimic în matematica intuiționistă, și prin urmare nu trebuie să apară nici în limbajul matematicii intuiționiste. Cu toate acestea, specificul negației intuiționiste, faptul că, în varianta lui Brouwer, nu-i corespund construcții matematice efective, ci construcții care o contrazic, iar în varianta lui Heyting doar construcții ipotetice de contradicții matematice, face ca admiterea constantelor propoziționale negate să nu încalce paralelismul matematico-lingvistic. Încălcarea ar apare doar în cazul cînd ar exista constante propoziționale cărora nu le-ar corespunde construcții matematice efective și nici construcții care să le contrazică (în varianta lui Brouwer) sau le-ar corespunde construcții efective false (în varianta lui Heyting).

⁷⁷ G. F. C. Griss, *La mathématique intuitioniste sans negation*, Nieuw Archief voor Wiskunde, III, 1955, p. 136.

⁷⁸ *Ibidem*, p. 135.

Odată admis acest lucru rămâne deschisă problema *obținerii* constantelor propoziționale care urmează a fi negate. Pe cale directă, adică pornind de la construcții matematice efective, nu pot fi obținute (Février), iar acest lucru este perfect corespunzător primelor teze intuționiste, și nici prin intermediul raționamentelor admisibile, în conformitate cu teza (VI) — poziția lui Griss.

Un argument convingător, care poate să justifice obținerea, dar *neintenționată*, a constantelor propoziționale care trebuie negate își găsește fundamentul în teza intuționistă (III). Într-adevăr, obiectul logicii matematice fiind limbajul matematic, iar acesta fiind un mijloc, mai mult sau mai puțin exact, de exprimare a construcțiilor matematice, și în logica matematicii intuționiste este posibilă apariția erorilor. Brouwerian vorbind, apariția unor constante propoziționale care prescurtează expresii cifrice greșite. Acestea se pot obține chiar pe cale directă, pornind de la construcții matematice ireproșabile. Fie, de exemplu, construcția intuitivă A , aceasta este exprimată cifric prin $\mathfrak{B}$, iar $\mathfrak{B}$ este prescurtat prin constanta individuală β . În mod normal β este asertat, respectiv $\perp, \beta$. Dar oare putem fi siguri că $\mathfrak{B}$ exprimă exact construcția A ? După Brouwer acest lucru este posibil numai în cazuri simple. În cazuri complicate este necesară verificarea lui β . Or, deși β a fost obținut pornindu-se de la A , se poate dovedi că lui A îi corespunde de fapt $\mathfrak{A}$ prescurtat prin α , respectiv $\perp, \alpha$, care îl contrazice pe β , de unde apare necesitatea negării lui, respectiv $\neg \beta$.

Dar expresiile negate pot fi obținute, tot în conformitate cu teza (III), și pe altă cale, respectiv prin intermediul raționamentelor. Căci acestea, deși sînt reduse la cele universal valabile, purtînd asupra limbajului matematic și nu asupra construcțiilor matematice efective, pot duce la rezultate eronate. Brouwer insistă asupra acestui lucru. El consideră că nu există adevăruri înainte de a fi experimentate, indiferent de modalitatea logică prin care au fost obținute, respectiv prin respectarea riguroasă a raționamentelor⁷⁹. Dacă, pornind de la constantele atestate $\perp, \alpha$, $\perp, \beta$ și $\perp, \gamma$ se obține pe cale logică, prin raționamente intuționiste, constanta propozițională δ , ea nu poate fi atestată în mod automat. Atestarea presupune verificarea ei. Dar în cadrul verificării se poate constata că lui δ îi corespunde o construcție matematică E , exprimată prin $\mathfrak{E}$ și prescurtată prin $\perp, \epsilon$ care îl contrazice pe δ , de unde se obține $\neg \delta$.

⁷⁹ L. E. J. Brouwer, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proc. Xth intern. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, p. 1243

Obținerea constantelor propoziționale care urmează a fi negate poate fi justificată deci pe baza tezei (III). În acest context, se poate reproșa lui Février și Griss că *nu admit posibilitatea erorii*, în primul caz, la exprimarea directă a construcțiilor matematice, în al doilea caz, la aplicarea raționamentelor asupra limbajului matematic. Dar reproșul nu este absolut. Ca și în cazul menționat, al excluderii falsului (la Onicescu), prin matematica intuiționistă poate fi înțeleasă teoria realizată și verificată a matematicii intuiționiste. În acest caz, negația pare într-adevăr inutilă. Nu trebuie uitat însă că, pentru Brouwer, matematica intuiționistă nu este o teorie, ci o *activitate*.

e) *Constante propoziționale nedecidabile*

Calea intuiționistă indirectă de obținere a paralelismului matematico-lingvistic presupune și discutarea așa-numitelor constante propoziționale *nedecidabile*, care apar în forma generalizată.

$$(9) \quad [(\alpha) \rightsquigarrow (\mathfrak{A}) \rightsquigarrow (-)] \rightsquigarrow (\alpha^0).$$

Este vorba de acele constante propoziționale, cărora, din punctul de vedere al lui Brouwer, nu le corespunde nici o construcție matematică efectivă, ca în cazul constantelor atestate, și nici o construcție matematică efectivă a cărei expresie lingvistică, să zicem β , să contrazică constanta propozițională în discuție, ceea ce ar determina negarea ei. Mai simplu, o constantă propozițională α este α^0 , dacă pentru α nu se poate demonstra nici $\vdash \alpha$ nici $\vdash \neg \alpha$.

În accepția lui Heyting, este vorba de constante propoziționale cărora nu le corespund construcții matematice efective, respectiv nu se dovedesc adevărate, dar nu le corespund nici construcții ipotetice contradictorii, deci nu se dovedesc nici false.

În accepția obișnuită este vorba de constantele propoziționale care nu sînt nici adevărate nici false și care au dat naștere interpretărilor trivalente ale logicii intuiționiste.

Problema esențială, din punct de vedere al interpretării comprehensive a logicii intuiționiste, poate fi concentrată în întrebarea: în logica matematicii intuiționiste sînt sau nu admisibile constantele propoziționale nedecidabile?

Este incontestabil faptul că intuiționiștii au fost primii care s-au ocupat în mod special cu depistarea enunțurilor matematice

nedecidabile. Mai mult, ei și-au fundamentat tezele pe existența efectivă a acestora. Dar aceasta nu înseamnă că le-au inclus în matematica intuiționistă.

Constantele nedecidabile, care prescurtează astfel de enunțuri, nu pot fi obținute pe cale directă nici măcar în calitate de erori. Ele nu pot fi obținute nici pornind de la constante atestate, pe baza raționamentelor logice admisibile intuiționistic, căci și în acest caz pot fi obținute doar constante atestate sau negate. Mai mult, obținerea lor întîmplătoare sau postularea lor nu are legătură nici cu matematica intuiționistă și nici cu logica acestei matematici. Astfel de enunțuri își au locul numai într-o logică în care este postulată valabilitatea absolută a legii terțului exclus. Dar, într-un astfel de context ele își pierd caracterul nedecidabil. În contextul unei astfel de logici, constanta α nu devine nedecidabilă, căci este valabilă formula $(\alpha \vee \sim \alpha)$. Deci constanta α , nedecidabilă intuiționistic, poate să apară drept componentă a unei formule valide. Brouwer a insistat adesea asupra faptului că admiterea valabilității legii terțului exclus în matematici coincide cu admiterea tezei că *nu există probleme matematice insolubile*⁸⁰, deci nici constante propoziționale nedecidabile.

Pe această bază, Barzin și Errera au susținut că nu este posibilă respingerea legii terțului exclus decît prin admiterea constantelor nedecidabile, iar admiterea constantelor nedecidabile (considerate de valoare terță) nu mai permite respectarea legii noncontradicției. Dar punctul de vedere intuiționist, conform primelor teze, este acela de respingere a constantelor nedecidabile și, în același timp, de respingere a valabilității legii terțului exclus, conform cu teza (VI), dar de menținere a legii noncontradicției.

Necesitatea respingerii constantelor nedecidabile este evidentă în contextul paralelismului matematico-lingvistic, dar necesitățile aceluiasi paralelism determină și respingerea valabilității terțului exclus *independent* de existența problemelor matematice insolubile deși inițial Brouwer a *pornit* de la astfel de probleme. Este vorba de cele două căi de obținere a paralelismului matematico-lingvistic. Conform primei căi se pleacă de la construcția efectivă A și se ajunge la $\perp_s \alpha$. Această cale *nu poate să ducă la formule de tipul terțului exclus* nici măcar în cazul în care, datorită imperfecțiunii limbajului, se comite o eroare și se ajunge la $\perp_s \beta$, care ulterior, prin verificare, devine $\neg \beta$, nu se obține o alternativă de tipul terțului exclus, căci

⁸⁰ Brouwer, *De onbetrouwbaarheid*,. F. 9.

$(\perp, \alpha \vee \neg \beta)$ nu este același lucru cu $(\perp, \alpha \vee \neg \alpha) =$ expresie imposibil de obținut pe această cale. Obținerea unei constante propoziționale pe calea raționamentelor logice se face *numai pornind de la constante atestate în prealabil* și nu de la constante negate, ceea ce face imposibilă apariția *formulelor disjunctive cu un termen negat*. Obținerea unei constante *oarecare* α este imposibilă în contextul paralelismului matematico-lingvistic. Ceea ce se obține este fie $\perp, \alpha$ fie $\perp, \alpha$ fie $\neg \alpha$. Numai obținerea unui α fără aceste determinări, deci *în afara* paralelismului matematico-lingvistic, ar îndreptăți întrebarea „oare este adevărat α sau $\sim \alpha$? (într-o logică a terțului exclus) sau întrebarea „Este posibil să nu se poată demonstra nici α nici $\sim \alpha$?” (într-o logică trivalentă).

Concluzia firească este că în logica matematicii intuïționiste nu au ce căuta constantele nedecidabile, iar excluderea lor nu înseamnă admiterea valabilității absolute a legii terțului exclus. Acesta este un punct de vedere fundamentat cu strictețe pe tezele intuïționiste.

Cu toate acestea, Heyting inclină să admită constantele nedecidabile, ca pe niște expresii *intermediare* între $\perp, \alpha$ și $\neg \alpha$. „Însă, spune Heyting, nu trebuie să utiăm că α^0 nu poate fi niciodată o expresie definitivă, deoarece există posibilitatea ca $\perp, \alpha$ sau $\neg \alpha$ să poată fi demonstrată cîndva”⁸¹. Procedul prin care ajunge Heyting la acest rezultat nu este însă intuïționist. „Fie dată, zice el, o propoziție $\alpha \dots$ ”⁸² pentru care se poate demonstra fie $\perp, \alpha$ fie $\neg \alpha$ fie nici una nici alta, deci α^0 . Dar „Fie dată...” este o cale neintuïționistă, de postulare a constantelor propoziționale.

Heyting respinge totuși constantele nedecidabile astfel postulate pe motivul că nu ar fi permanente. Există într-adevăr și astfel de situații, dar α^0 nu le vizează numai pe acestea. Și dacă este vorba de o manieră arbitrară de a postula astfel de constante, atunci *fie dată* ipoteza lui Goldbach „Orice număr par poate fi reprezentat prin suma a două numere prime” sau „Între zecimalele lui π există succesiunea 123456789” pentru care este practic imposibil să se demonstreze $\perp, \alpha$ sau $\neg \alpha$. Prin urmare, lipsa de permanență nu este un motiv suficient pentru respingerea constantelor nedecidabile. Motivul pur intuïționistic trebuie să fie conformitatea cu tezele intuïționiste care determină paralelismul matematico-lingvistic.

Se poate conchide că postularea oricărei constante nedecidabile trebuie să implice, în cadrul logicii intuïționiste, *respingerea ei*.

⁸¹ A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste*, p. 960.

⁸² *Ibidem*, p. 959.

Barzin și Errera au observat un lucru interesant și anume faptul că respingerea intuiționistă a constantelor de tip α^0 este și ea *un fel de negație*. Ei se referă la enunțuri de genul „este fals că principiul terțului exclus este fals”⁸³, — în loc de „Principiul terțului exclus” poate figura orice constantă nedecidabilă — ; același lucru se petrece în cazul în care se spune că „principiul terțului exclus nu este adevărat”. Enunțurile sînt complementare: „este fals că este fals” nu înseamnă, din punct de vedere intuiționist, că „este adevărat”, iar „nu este adevărat”, nu înseamnă „este fals”. Despre α^0 nu se poate spune însă nici că „este adevărat” nici că „este fals”. Problema care interesează acum este distincția dintre „nu este adevărat” și „este fals”, în notația noastră, dintre α^0 și $\neg \alpha$.

Heyting încearcă, la început, să eludeze problema⁸⁴, mai precis, încearcă s-o rezolve utilizînd argumente gnoseologice, ceea ce nu poate să ducă la nici un rezultat pozitiv. „Nu este adevărat”, conchide în cele din urmă Heyting, înseamnă „nu a fost demonstrat”, iar „este fals” are semnificația amintită deja.

Barzin și Errera nu se mulțumesc cu acest răspuns⁸⁵. Heyting este nevoit să admită *două tipuri de negație*, una „tare” și una „mai slabă”⁸⁶. Ultima, consideră el, nu este aplicabilă în logica formală. Negația tare, în accepția lui Heyting, este negația intuiționistă identifică cu falsul. Ea se citește „este fals că...” sau „este imposibil ca...”. Negația slabă se citește „nu este adevărat că...”. În propozițiile matematice [expresii constante] apare numai prima, însă în propozițiile *despre* matematică nu poate fi evitată a doua⁸⁷. Înlăturînd utilizarea negației slabe din matematică, Heyting se postează pe o poziție intuiționistă, dar *indirectă* și, în același timp, *arbitrară*.

Poziția este indirectă, deoarece negația slabă este deja o consecință a admitterii într-un fel sau altul a constantelor nedecidabile. Ea este arbitrară deoarece presupune o interdicție lipsită de temei logic. Într-adevăr, pornind pe această cale, o constantă (sau combinație de constante) trebuie să fie sau adevărată sau falsă, sau „nici

⁸³ M. Barzin et A. Errera, *Sur la logique de M. Heyting*, Enseignement mathématique, XXX, 1931, p. 248.

⁸⁴ Cf. A. Heyting, *A propos d'un article de MM Barzin et Errera*, Enseignement mathématique, XXXI, 1932, p. 122.

⁸⁵ M. Barzin et A. Errera, *Note sur la logique de M. Heyting*, Enseignement mathématique, XXXI, 1932, p. 123.

⁸⁶ A. Heyting, *Discussion sur la logique intuitionniste*, Enseignement mathématique, XXXI, 1932, p. 272.

⁸⁷ A. Heyting, *Intuitionism in mathematics*, p. 108—109.

adevărată nici falsă". Dar, în acest sens ar trebui să li se dea dreptate lui Barzin și Errera, căci de ce să fie admise constantele negate, false în cel mai tare sens al cuvîntului, și să fie respinse cele care nu sînt adevărate dar nici false?

Temeiul respingerii acestora rezidă numai în respectarea consecventă a tezelor intuiționiste.



Trecerea în revistă a tipurilor de constante propoziționale, care apar în contextul logicii intuiționiste, pune în evidență faptul că interpretarea valorică a logicii intuiționiste nu este o problemă simplă. Există cîteva variante și toate se dovedesc îndreptățite, deși nu în aceeași măsură.

În conformitate cu tezele intuiționiste, cea mai potrivită se dovedește varianta lui Brouwer, după care adevărul nu apare decît pe treapta matematicii pure. Acest lucru nu poate fi admis însă decît în matematica intuiționistă. Limbajul matematic nu face decît să exprime acest adevăr. Limbajul în sine nu este adevărat sau fals. Din această cauză, nici constantele propoziționale nu sînt adevărate sau false, iar negația unei constante propoziționale nu are nici o legătură cu valorile de adevăr. Imposibilitatea obținerii constantelor nedecidabile și inutilitatea lor nu mai permite nici o discuție în legătură cu o eventuală interpretare polivalentă a logicii intuiționiste.

Transpunerea adevărului de la nivelul matematicii pure la acela al limbajului matematic, admiterea în exclusivitate a căii directe de obținere a paralelismului matematico-lingvistic în considerarea matematicii drept o teorie elaborată deja, permit lui Onicescu elaborarea unei logici cu o singură valoare și anume adevărul. Varianta lui Onicescu, asemănătoare și cu aceea a lui Griss, presupunînd deci excluderea negației și conținînd chiar anumite idei de tip intuiționist în legătură cu experiența matematică mentală, nu este totuși intuiționistă în adevăratul sens al cuvîntului, ci are numai o legătură indirectă cu tezele intuiționiste.

Varianta susținută de Février este restrictivă. Ea se limitează la calea directă de obținere a paralelismului matematico-lingvistic ceea ce face imposibilă admiterea constantelor atestate. Restricțiile determină apoi și admiterea altor logici care nu mai au nimic comun cu intuiționismul.

Varianta lui Griss, care identifică negația cu falsul și o exclude, se dovedește tot monovalentă. Ea presupune însă într-un orizont mai larg decît cel oferit de Février posibilitatea evitării negației = falsul prin postularea exactității limbajului și a imposibilității erorii, lucru posibil numai în cadrul unei teorii matematice constituite. Însă matematica intuiționistă nu este o teorie, ci o activitate.

Poziția cea mai apropiată de aceea a logicii obișnuite este a lui Heyting, care admite și adevărul și falsul, acesta din urmă fiind însă identic cu negația. Ce-i drept, în spirit intuiționist, adevărul la Heyting coincide cu ceea ce am numit atestabilitate sau demonstrabilitate, stabilit fiind faptul că entitățile matematice nu sînt gata constituite pentru a putea fi comparate cu limbajul matematic.

În fine, atît la Heyting cu oscilații, cît mai ales la Barzin și Errera apare problema nedecidabilelor care sugerează trivalența.

Admiterea acestor puncte de vedere și dezvoltarea lor consecventă pe treapta imediat superioară paralelismului matematico-lingvistic duce la elaborarea a tot atîtea logici intuiționiste. În continuare vor fi urmărite *numai* acelea care corespund în mai mare măsură tezelor intuiționiste.

f) *Specificul variabilelor propoziționale intuiționiste*

Pe calea directă a obținerii paralelismului matematico-lingvistic variabilele propoziționale sau combinațiile lor se obțin prin generalizarea constantelor propoziționale. Expresiile asertate sau atestate, de exemplu $\vdash \alpha$, $\vdash \beta$, $\vdash \gamma$, ... pot fi generalizate prin variabila propozițională a . În cadrul expresiilor constante complexe, fiecare constantă propozițională diferită este generalizată printr-o variabilă diferită: $\vdash \alpha$ prin a , $\vdash \beta$ prin b , $\vdash \gamma$ prin c , ... Aceasta nu înseamnă că expresiile devin echivalente, ci înseamnă că în formula care conține, de exemplu, două variabile sau trei, trebuie să apară două sau trei constante diferite. Dacă este vorba de expresia constantă

$$(11) \quad (\vdash \alpha \wedge \vdash \beta) \supset \vdash \gamma,$$

ea poate fi generalizată prin

$$(3) \quad (a \wedge b) \supset c.$$

Expresia (3) nu reprezintă transcrierea expresiei (11), ci generalizarea ei, deoarece (3) nu transcrie numai expresia (11), ci și expresia

$$(12) \quad (L_i \delta \wedge L_i \zeta) \supset L_i \eta$$

și orice altă expresie de această formă.

Expresiile negat $\neg \alpha$, $\neg \beta$, $\neg \gamma, \dots$ pot fi generalizate prin variabila $\neg a$. Generalizarea expresiilor constante negate este analogă cu generalizarea celor asertate sau atestate.

Dar aceasta nu este decît una dintre variante, adică varianta de tip Brouwer, în care nu este vorba de valori de adevăr și în care sînt admise constantele propoziționale negate. Varianta lui Griss presupune interdicția variabilelor negate $\neg a$, $\neg b$, $\neg c, \dots$ cît și a combinațiilor cu variabile negate. Aceasta, deoarece sînt interzise constantele $\neg \alpha$, $\neg \beta$, $\neg \gamma, \dots$. Varianta lui Onicescu presupune interdicția variabilelor propoziționale false. Iar în varianta lui Heyting apar variabile propoziționale adevărate și variabile propoziționale false (= negate).

Făcînd abstracție de variante, se constată că variabilele propoziționale negate, sînt greu de justificat în context intuiționist. Într-adevăr, admitînd ambele căi de obținere a paralelismului matematico-lingvistic se ajunge atît la constante asertate cît și la constante atestate sau negate. Dar dintre acestea, odată obținute, este evident că sînt *menținute* numai aserțiunile sau constantele atestate. Ce sens ar avea menținerea unor expresii cărora nu le corespund construcții matematice efective (Brouwer) sau le corespund doar contradicții (Heyting)? Obținerea lor are sens, dar menținerea lor nu. În această situație, ar fi tot atît de lipsită de sens *generalizarea* constantelor negate. Cu alte cuvinte, menținerea constantelor negate și generalizarea lor încalcă însuși principiul paralelismului matematico-lingvistic. Duce la elaborarea unui limbaj fără corespondent matematic, ceea ce nu mai corespunde cerințelor impuse de primele teze intuiționiste.

Din acest punct de vedere, varianta lui Griss și Février se dovedește aplicabilă și pe treapta variabilelor propoziționale, tot așa varianta lui Onicescu. Dealtfel, cele două variante coincid la nivel propozițional. Onicescu consideră că „obiectele” logicii sale constituie un sistem Σ_0 . P , $Q, \dots$ sînt propoziții (variabile) iar $\bar{P}$, $\bar{Q}, \dots$ sînt negațiile lor; $\bar{P}$, $\bar{Q}$, etc. nu sînt propoziții ale sistemului⁸⁸. Prin

⁸⁸ O. Onicescu, *op. cit.*, p. 46.

urmare, într-o formă sau alta, în ambele interpretări sînt respinse variabilele negate.

Cu toate acestea, modalitățile *specifice* în care sînt introduse variabilele negate în logica intuiționistă nu încalcă paralelismul matematico-lingvistic. Este vorba însă *numai* de varianta lui Brouwer și de varianta lui Heyting și nu de accepția obișnuită a negării unei variabile propoziționale.

În acest sens, generalizarea unei constante propoziționale $\neg \alpha, \neg \beta, \neg \gamma, \dots$ prin $\neg a$, deci obținerea lui $\neg a$ pe cale directă, specificîndu-se că $\neg a$ nu poate să stea niciodată decît *numai* pentru constante propoziționale negate, pune variabila propozițională negată, deși pe o altă treaptă de generalizare (stadiul al treilea al matematicii) în aceeași postură în care se găsea constanta propozițională negată în stadiul al doilea, respectiv în stadiul propriu-zis al paralelismului matematico-lingvistic. Cu alte cuvinte, în aceeași măsură în care era admisibilă sau nu constanta propozițională negată este admisibilă sau nu și variabila propozițională negată. Numai în cazul în care prin $\neg a$ s-ar înțelege negarea obișnuită, respectiv faptul că $\neg a$ ar fi adevărată cînd a este falsă și falsă cînd a este adevărată, atunci într-adevăr ea nu ar mai fi admisibilă.

Dar această situație nu apare în varianta lui Brouwer și nici în varianta lui Heyting. La Brouwer nu poate să apară, deoarece în varianta lui nu apar valorile de adevăr. La Heyting, înțelegînd prin negare falsul, $\neg a$ nu va putea fi niciodată adevărată, deci nu va putea fi înlocuită decît cu constante propoziționale false, respectiv $\neg \alpha, \neg \beta, \neg \gamma, \dots$

Prin urmare, specificul variabilelor propoziționale intuiționiste $a, b, c, \dots$ constă în aceea că ele generalizează numai constante propoziționale asertate sau atestate, în timp ce variabilele intuiționiste $\neg a, \neg b, \neg c, \dots$ generalizează numai constante propoziționale negate. Deci variabila propozițională intuiționistă spre deosebire de variabila propozițională obișnuită, deși nu conservă conținutul concret al constantelor propoziționale, le menține (în terminologia lui Heyting) valoarea de adevăr ($a, b, c, \dots$ nu pot fi niciodată false, iar $\neg a, \neg b, \neg c, \dots$ nu pot fi niciodată adevărate).

Specificul constantelor propoziționale intuiționiste garantează, în cadrul trecerii de la stadiul doi, al paralelismului matematico-lingvistic, la stadiul trei, al construcțiilor lingvistice, respectarea tezelor intuiționiste, fie în forma extremistă a excluderii variabilelor negate, fie în forma determinării lor valorice.

Una dintre consecințele imediate ale respectării tezelor intuiționiste o constituie imposibilitatea apariției variabilelor propoziționale pentru constante nedecidabile, pentru simplul motiv că acestea din urmă nu pot fi obținute în cadrul paralelismului matematico-lingvistic și ca atare nu există nici un motiv pentru generalizarea lor. Aceasta înseamnă, în terminologia lui Heyting, că pe treapta intuiționistă a construcțiilor lingvistice nu poate să apară „negația slabă”.

$\neg a$ înseamnă deci à la Brouwer, o variabilă propozițională care poate fi înlocuită numai cu constante propoziționale negate, iar à la Heyting, că poate fi înlocuită numai cu constante propoziționale care implică o contradicție matematică.

Trebuie subliniat un fapt de mare importanță, care este adesea trecut cu vederea, și anume *deosebirea fundamentală* dintre *variabilele propoziționale formaliste* $p, q, r, \dots$ și *variabilele propoziționale intuiționiste* $a, b, c, \dots$. Primele stau pentru propoziții în genere (acestea pot fi matematice sau nu). Hilbert și Ackermann dau exemple ca : „2 este mai mic decât 3” și „zăpada este neagră”. Variabilele propoziționale formaliste pot fi adevărate sau false (p poate să stea fie pentru „zăpada este albă”, fie pentru „zăpada este neagră”; în primul caz p este adevărată, în al doilea p este falsă). Variabilele propoziționale intuiționiste stau *numai* pentru propoziții *matematice* constante *adevărate* (asertate sau atestate), ca „2 este mai mic decât 3” și niciodată pentru propoziții ca „zăpada este albă” deși ultima este adevărată. Deosebirea este și mai evidentă în cadrul negației : $\sim p, \sim q, \sim r, \dots$ stau de asemenea pentru propoziții adevărate sau false ($\sim p$ poate să însemne „este fals că «zăpada este albă»” sau „este fals că «zăpada este neagră»”; în primul caz $\sim p$ este falsă, în al doilea este adevărată, în timp ce $\neg a, \neg b, \neg c, \dots$ stau *numai* pentru propoziții matematice constante *false*, ca „3 este mai mare decât 2” și niciodată pentru propoziții ca „zăpada este neagră”, deși ultima este o propoziție falsă.

Heyting, cu toate că menține toate caracteristicile variabilei intuiționiste, renunță în cele din urmă la notația inițială⁸⁹. În loc de $a, b, c, \dots$ el utilizează semnele formaliste $p, q, r, \dots$ care pot da naștere la înțelegeri greșite. Astfel, pare curios faptul că negația nu este definită în raport cu variabilele $(p, q, r, \dots)$, ci în raport cu constantele $(\alpha, \beta, \gamma, \dots$ în notația noastră). De asemenea, este curios faptul că negația și toate celelalte operații logice nu sînt definite în raport cu valorile de adevăr. Dacă se păstrează însă notația intuițio-

⁸⁹ Vide A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam, 1966, p. 97.

nistă, atunci lucrurile devin clare : aici este vorba de variabile intuiționiste și de operații logice intuiționiste, deci $p \neq a$; $q \neq b$; $r \neq c$; ... și $\sim p \neq \neg a$; $\sim q \neq \neg b$; $\sim r \neq \neg c$; ...

Negația obișnuită se definește în funcție de valorile de adevăr. Ea însăși este, spre deosebire de negația intuiționistă, o funcție de adevăr. Din această cauză, negația obișnuită nu se identifică cu falsul : $\sim p$ nu înseamnă „este fals p ” ; $\sim p$ este fals numai dacă p este adevărat și este adevărat, dacă p este fals. Această situație poate fi redată prin jocul matricial al negației, respectiv

p	$\sim p$
A	F
F	A

în care A = adevărul, iar F = falsul.

Din punct de vedere intuiționist, $\neg a$ înseamnă întotdeauna a este fals, respectiv $\neg a$ poate fi înlocuit numai cu $\neg \alpha$, $\neg \beta$, $\neg \gamma$, iar a simplu înseamnă a este adevărat respectiv a poate fi înlocuit numai cu $\perp \alpha$, $\perp \beta$, $\perp \gamma$, ... ceea ce înseamnă că *nu poate fi alcătuită nici o matrice valorică pentru negația intuiționistă ; ea nu este o funcție de adevăr.*

Admiterea variabilelor de acest tip, respectiv a și $\neg a$, cu evitarea acelei negații slabe, transformă sistemul într-unul aparent analog celui bivalent. Într-adevăr, inexistența variabilelor pentru expresii de tip α^0 lasă impresia că ar fi valabilă alternativa sau a sau $\neg a$, iar a treia posibilitate nu există — ceea ce ar echivala cu principiul terțului exclus⁹⁰.

Mascând însă specificul variabilelor propoziționale intuiționiste și avînd întotdeauna în vedere acest lucru, analogia menționată devine pur formală.

O variabilă a intuiționistă nu are aceeași semnificație cu o variabilă p obișnuită. Ultima *nu este* adevărată sau falsă, dar poate deveni astfel prin înlocuirea ei cu o propoziție oarecare. Deci p , prin definiție, ca și $\sim p$, poate fi sau adevărată sau falsă, presupunînd

⁹⁰ M. Barzin et. A. Errera, *Sur le principe du tiers exclu*, Archives de la Société Belge de Philosophie, 1929, p. 10.

astfel alternativa terțului exclus. În schimb a nu poate fi înlocuită decât cu propoziții matematice atestate. Ea nu lasă posibilitatea altei alternative. Tot astfel $\neg a$ nu poate fi înlocuită decât cu propoziții matematice negate. Chiar dacă am admite că a ar putea fi numai adevărată, pentru substituțiile permise, iar $\neg a$ ar fi numai falsă (deși numai la Heyting este permisă introducerea valorilor de adevăr), ar fi evident faptul că despre nici o variabilă propozițională intuiționistă nu se va spune că poate deveni „sau adevărată sau falsă”, ci că poate deveni *numai* adevărată, dacă este de forma a , și poate deveni *numai* falsă, dacă este de forma $\neg a$. Dar acest mod de exprimare (cu valori de adevăr) trebuie în genere evitat.

g) Semnificația operațiilor logice

Astăzi este admis faptul că operațiile logice în interpretare intuiționistă nu sînt *funcții de adevăr*. Ele sînt imposibil de conceput astfel și, ca atare, chiar din punct de vedere formalist, trebuie să fie distinse de operațiile clasice⁹¹. Deci nu numai negația, ci și restul operațiilor trebuie să fie notate cu simboluri speciale. Pînă în acest moment au fost utilizate următoarele simboluri pentru operații clasice: $\sim$ (negație); $\&$ (conjuncție); $\vee$ (disjuncție); $\rightarrow$ (implicație). Simbolurile intuiționiste vor fi: $\neg$ (negație); $\wedge$ (conjuncție); $\vee$ (disjuncție); $\supset$ (implicație). Ținînd cont de faptul că nici variabilele nu sînt identice (cele clasice: $p, q, r, \dots$; cele intuiționiste: $a, b, c, \dots$), este evident că deosebirea dintre cele două tipuri de operații logice trebuie să fie marcate la fiecare pas. Mai mult, operațiile intuiționiste trebuie să fie concepute și gîndite independent de cele clasice. Altfel nu se poate înțelege specificul lor. Heyting sugerează chiar posibilitatea utilizării unor *alte denumiri* pentru operațiile intuiționiste. Intuiționiștii, spune Heyting, nu vor obiecta, deoarece construcțiile lor mentale nu pot fi influențate de modalitatea exprimării lor.⁹²

J. Myhill consideră că există două metode de *explicare* a operațiilor logice: una clasică [respectiv formalistă] în care sînt date condițiile de *adevăr* ale fiecărei operații și una intuiționistă în care

⁹¹ Cf. D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer-Verlag, 1967, p. 30–31.

⁹² A. Heyting, *Intuitionism in mathematics*, p. 108.

sînt date condițiile lor de *asertabilitate*⁹³. Ilustrînd însă „asertabilitatea”, Myhill utilizează numai variabile propoziționale. Ce-i drept, el specifică faptul că pentru intuiționist propozițiile [expresiile constante] sînt „cunoscute a fi adevărate” sau „cunoscute a fi false” și „cu valoare necunoscută pînă în prezent”. Ultima remarcă denotă faptul că Myhill procedează totuși în mod formalist, adică nu pornește de la construcțiile matematice la expresiile lor.

Utilizînd „asertabilitatea” la nivelul variabilelor propoziționale se ajunge însă la un tip de definiții fără comprehensiune, căci este imposibilă asertarea *directă* a unei variabile propoziționale.

Heyting utilizează și el, în ultima lucrare de proporții (*Intuitionism. An introduction*, 1966), metoda explicării operațiilor logice prin asertabilitate, dar el nu asertează variabilele propoziționale, ci constantele. Mai precis, el explică operațiile cu variabile prin intermediul operațiilor cu constante, ceea ce denotă un punct de vedere pur intuiționist. Dar aceasta este numai *una* dintre variantele pe care le-a încercat Heyting.

Una dintre primele variante (1930) marchează un lucru interesant și anume faptul că operațiile logice intuiționiste *nu pot fi definite una prin intermediul celeilalte*, cum se procedează de obicei.⁹⁴ R. Carnap, de exemplu, consideră că „implicația” este o *abreviere* a disjuncției cu un membru negat.⁹⁵ Astfel apare formula

$$(13) \quad (p \rightarrow q) = (\sim p \vee q).$$

Formula (13) nu poate să apară în logica intuiționistă, deoarece

$$(13') \quad (a \supset b) = (\neg a \vee b)$$

presupune

$$(14) \quad ((a \supset b) \supset (\neg a \vee b)) \wedge ((\neg a \vee b) \supset (a \supset b)).$$

Însă, arată Heyting⁹⁶, în logica intuiționistă este valabilă

$$(4.46) \quad (\neg a \vee b) \supset (a \supset b),$$

⁹³ J. Myhill, *The formalization of intuitionism*, în „La philosophie contemporaine”, Firenze, 1968, p. 326.

⁹⁴ A. Heyting, *Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, p. 44. Problema a fost reluată de M. Wajsberg, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting*, *Wiadomości matematyczne*, 49, 1938 și Mc Kinsey, *Proof of the independence of primitive symbols of Heyting's calculus of propositions*, *Journal of symbolic logic*, 4, 1939.

⁹⁵ Cf. R. Carnap, *Introduction to symbolic logic*, New York, 1958, p. 8.

⁹⁶ A. Heyting, *Loc. cit.*

dar nu mai este valabilă conversa, respectiv

$$(15) \quad (a \supset b) \supset (\neg a \vee b).$$

Deci (14) nu poate fi susținută intuïționistic, ceea ce înseamnă că (13') nu este valabilă în logica intuïționistă.

Operațiile logice nu sînt definite, ci *explicitate* drept concepute fundamentale. Astfel apar *patru* operații :

$a \supset b$, «din a urmează b »

$a \wedge b$, « a și b »

$a \vee b$, « a sau b »

$\neg a$, «non a »⁹⁷.

În afară de adosul că fiecare operație este independentă una de cealaltă, Heyting încearcă să expliciteze mai amănunțit semnificația implicației. «din a urmează b » ar însemna «dacă a este corect, atunci și b este corect», enunțul avînd sens chiar dacă a și b sînt expresii constante a căror corectitudine nu este cunoscută. Referindu-se apoi la variabile, Heyting tinde să expliciteze implicația prin condiții de adevăr, doar atît că în loc de adevărat (*wahr*) zice corect (*richtig*), ceea ce denotă o intenție de tip formalist.

O a doua variantă este aceea a construcțiilor *ipotetice* sau a intențiilor de construcții, pe care Heyting o echivalează ulterior cu aceea a lui Kolmogorov⁹⁸. Aici variabilele propoziționale sînt socotite intenții sau probleme. Heyting specifică, de data aceasta, că ($a \supset b$) nu poate fi definită prin valori de adevăr, deoarece ea „este lipsită de sens în cazul în care valoarea lui a și b este necunoscută”⁹⁹. Această remarcă denotă renunțarea la semnificația formalistă a variabilelor din varianta precedentă.

În fine, în ultima variantă (1966) Heyting renunță la interpretarea operațiilor logice prin intenții sau probleme. Dealtfel, acestea sînt modele ale logicii intuïționiste, care trebuie să fie justificate prin această logică, nu să o justifice.

⁹⁷ *Ibidem*, p. 43.

⁹⁸ A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 17.

⁹⁹ *Ibidem*, p. 16.

El explicitează operațiile logice cu variabile propoziționale prin operații cu constante propoziționale, cărora le enunță condițiile de asertabilitate. În legătură cu conjuncția, consideră că $(\alpha \wedge \beta)$ poate fi asertată dacă și numai dacă poate fi asertată α și β ¹⁰⁰.

În sens intuiționist, este vorba de două construcții mentale : să zicem UNU PLUS UNU ESTE EGAL CU DOI și UNU PLUS DOI ESTE EGAL CU TREI. Aceste construcții sînt exprimate lingvistic prin „ $1 + 1 = 2$ ” și „ $1 + 2 = 3$ ”. Ele pot fi prescurtate prin $\perp, \alpha$ și $\perp, \beta$, ambele fiind asertate. Explicația dată de Heyting ia forma „dacă are loc $\perp, \alpha$ și are loc $\perp, \beta$, atunci are loc $\perp, (\perp, \alpha \wedge \perp, \beta)$ ”. Este însă evident că pe cale directă nu pot fi obținute decît conjuncții asertate. Într-adevăr, notînd cu $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ constantele care prescurtează propozițiile matematice obținute prin construcții mentale se ajunge la o înșirare de genul $\perp, \alpha, \perp, \beta, \perp, \gamma, \dots$. Din acestea se pot grupa apoi conjuncții cu doi, trei, patru... membri.

Dar, explicația lui Heyting este, din punctul nostru de vedere incompletă. Aici trebuie adăugată și calea indirectă a atestării, altfel se rămîne la nivelul logicii fără negație (è la Février). Pe cale indirectă, adică pornind de la constante, care nu știm dacă prescurtează sau nu expresii lingvistice care să exprime construcții matematice efective, se poate ajunge la negarea lor. În această situație, dacă cel puțin unul dintre membrii unei conjuncții este negat, conjuncția nu va fi atestată. Să zicem că α prescurtează pe „ $1 + 1 = 2$ ” iar β pe „ $1 + 2 = 4$ ”, atunci lui „ $1 + 1 = 2$ ” îi corespunde construcția UNU PLUS UNU ESTE EGAL CU DOI și se obține $\perp, \alpha$ (atestat α), pe cînd „ $1 + 2 = 4$ ” nu corespunde nici unei construcții matematice, dar se poate obține construcția UNU PLUS DOI ESTE EGAL CU TREI, exprimată prin „ $1 + 2 = 3$ ” și prescurtată prin $\perp, \gamma$ (asertat γ), care îl contrazice pe β , de unde se obține $\neg \beta$. $\perp, \alpha$ face parte dintr-un șir de constante atestate. Numai împreună cu una, să zicem $\perp, \gamma$ (sau cu mai multe), dintre acestea, $\perp, \alpha$ ar putea alcătui o conjuncție atestată, ca $\perp, (\perp, \alpha \wedge \perp, \gamma)$. Ea nu poate alcătui o conjuncție atestată împreună cu $\neg \beta$, care face parte dintre constantele negate. Prin urmare conjuncția lor trebuie negată, respectiv $\neg (\perp, \alpha \wedge \neg \beta)$, care ar însemna că $\perp, \alpha$ și $\neg \beta$ nu pot face parte din succesiunea de constante propoziționale atestate. Cu atît mai puțin vor face parte din această succesiune două constante negate, ca $\neg \alpha$ și $\neg \beta$, de unde urmează $\neg (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$.

¹⁰⁰ A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, p. 98.

Prin urmare, pe cale asertivă se obțin numai conjuncții asertate; pe calea atestării se pot obține și conjuncții atestate și conjuncții negate. Introducerea variabilelor înseamnă din punct de vedere intuiționist *generalizarea* acestor rezultate. Astfel $(a \wedge b)$ înseamnă o conjuncție asertată sau atestată, căci a și b pot fi înlocuite numai cu constante asertate sau atestate, în timp ce $\neg(a \wedge \neg b)$ sau $\neg(\neg a \wedge b)$ sau $\neg(\neg a \wedge \neg b)$ reprezintă conjuncții negate, căci cel puțin unul dintre termeni trebuie înlocuit cu o constantă negată.

Se ajunge astfel la o situație curioasă. Deși interpretarea conjuncției, în cazul constantelor, dădea impresia unei analogii cu interpretarea prin condiții de adevăr (dacă s-ar identifica asertarea și atestarea cu adevărul, iar negarea cu falsul), în cazul variabilelor intuiționiste, $(a \wedge b)$ este asertată și atestată *oricând*, deoarece a și b pot fi înlocuite numai cu constante asertate sau atestate. Expresia analogă $(p \& q)$ din logica formalistă *nu poate fi mereu adevărată*, deoarece p și q pot fi înlocuite cu constante a căror valoare de adevăr nu este cunoscută. Deci p sau q poate fi înlocuit cu o constantă care prescurtează o expresie falsă. În plus, celelalte cazuri intuiționiste $(a \wedge \neg b)$; $(\neg a \wedge b)$; $(\neg a \wedge \neg b)$ sînt *întotdeauna* negate, căci conțin cel puțin o variabilă care trebuie înlocuită cu o constantă negată; în schimb formulele analoge $(p \& \sim q)$; $(\sim p \& q)$; $(\sim p \& \sim q)$, ca și $(p \& q)$ pot fi *uneori* adevărate *alteori* false.

Formulînd rezultatele obținem :

$$\Box (a \wedge b)$$

$$\neg (a \wedge \neg b)$$

$$\neg (\neg a \wedge b)$$

$$\neg (\neg a \wedge \neg b).$$

Semnul „ $\Box$ ” înseamnă „asertat sau atestat”.

La o situație analogă se ajunge și în cazul celorlalți operatori logici. În cazul disjuncției, pe cale asertivă, nu se poate imagina decît situația în care ambii membri ai disjuncției sînt asertați, deci $\Box \alpha$ sau $\Box \beta$ și, prin urmare $\Box (\Box \alpha \vee \Box \beta)$. Semnificația unor astfel de disjuncții poate fi imaginată de exemplu în cazul *alternativelor* de operații cu același rezultat. Să zicem că este vorba de „ $1 + 2 = 3$ ” și „ $2 + 1 = 3$ ”, prescurtate prin $\Box \alpha$ și respectiv $\Box \beta$. În situația

atestării, unul sau amîndoi membrii disjuncției pot fi negați. Dacă este negat numai unul respectiv este negat α , și este atestat β , să zicem că α înseamnă „ $1 + 2 = 9$ ” iar β înseamnă „ $1 + 2 = 3$ ”, înseamnă că se obține rezultatul dorit, menținînd β și respingînd α și deci este atestată alternativa $\vdash_t (\neg \alpha \vee \vdash_t \beta)$; tot așa în cazul $\vdash_t (\vdash_t \alpha \vee \neg \beta)$. Numai cînd ambii membri sînt negați nu poate fi obținut rezultatul dorit; în cazul cînd α înseamnă „ $1 + 2 = 9$ ”, iar β înseamnă „ $1 + 2 = 4$ ”, atunci negăm disjuncția, respectiv $\neg (\neg \alpha \vee \neg \beta)$. Utilizînd variabile intuiționiste pot fi formulate următoarele rezultate

$$\Box (a \vee b)$$

$$\vdash_t (\neg a \vee b)$$

$$\vdash_t (a \vee \neg b)$$

$$\neg (\neg a \vee \neg b).$$

Cazul implicației poate fi ilustrat cel mai simplu printr-o operație matematică în care α prescurtează „ $1 + 2 = 3$ ” iar β pe „ $2 + 1 = 3$ ”. Fiind asertat α , este asertat și β . Heyting încearcă explicația utilizînd o a treia construcție (γ), care ar putea fi, „ $(2 + 1 = 3) = (1 + 2 = 3)$ ”. În acest caz, spune Heyting, cînd există o construcție γ astfel încît ea să presupună automat odată cu construcția lui α și construcția lui β , atunci este asertată implicația de la α la β . În terminologia noastră: dacă întotdeauna cînd are loc $\vdash_t \alpha$, are loc și $\vdash_t \beta$, atunci are loc și $\vdash_t (\vdash_t \alpha \supset \vdash_t \beta)$. Aceeași situație apare și în cazul atestării: dacă întotdeauna cînd are loc $\vdash_t \alpha$, are loc și $\vdash_t \beta$, atunci are loc și $\vdash_t (\vdash_t \alpha \supset \vdash_t \beta)$.

Cazul în care α ar fi negat și β asertat sau atestat nu poate să apară, căci dacă are loc o contradicție nu se poate să aibă loc prin aceasta și o construcție matematică efectivă, și tot astfel în cazul în care α ar fi asertat sau atestat și β ar fi negat.

Cu atît mai evident este cazul în care atît α cît și β ar fi negate. S-ar obține atunci o relație între două expresii lingvistice fără corespondent matematic. Admiterea unei astfel de relații nu ar mai corespunde paralelismului matematico-lingvistic.

Implicația astfel interpretată nu mai are nimic comun cu cea obișnuită. Generalizat, nici măcar cazul $(a \supset b)$ nu este întotdeauna atestabil.

Ce-i drept, aici ar putea fi introdusă, deși acest lucru nu se face de regulă, și un fel de implicație *mai puțin strictă*, care ar permite în mai multe cazuri atestabilitatea și asertabilitatea formulei $(a \supset b)$. S-ar putea considera că $(\alpha \supset \beta)$ este asertată sau atestată, dacă fiind asertat sau atestat α , poate fi asertat sau atestat și β , dar nu numai *pentru* sau *prin faptul* că a fost asertat sau atestat β , ci și *ca urmare* a acestui fapt. Să zicem că este vorba de o succesiune de operații în care unui număr par i se adaugă o unitate, obținându-se un număr impar : „ $2 + 1 = 3$ ”; „ $4 + 1 = 5$ ”; „ $6 + 1 = 7$ ”; ... , prescurtat $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. În acest caz, s-ar putea considera că fiind asertat α , este asertat și β , ca urmare a continuării acestui procedeu, de unde va avea loc și $\vdash_s (\vdash_s \alpha \supset \vdash_s \beta)$.

O formă și mai puțin strictă a implicației ar putea fi introdusă prin enunțuri de tipul : dacă este asertat sau atestat α , și este asertat sau atestat și β , atunci este asertat sau atestat și $(\alpha \supset \beta)$; de unde ar urma $\vdash (\alpha \supset \beta)$. Acest caz nu poate să aibă însă loc în logica intuiționistă, deoarece ar determina identitatea conjuncției cu implicația, căci în ambele cazuri ar fi asertate sau atestate doar formulele care nu conțin termeni negativi.

Menținând deci semnificația intuiționistă mai mult sau mai puțin strictă a implicației obținem următoarele rezultate :

$$\perp (a \supset b)$$

$$\neg (\neg a \supset b)$$

$$\neg (a \supset \neg b)$$

$$\neg (\neg a \supset \neg b).$$

Semnul „ $\perp$ ” înseamnă „consistent”. El stă în fața unei formule care poate fi uneori asertată sau atestată, dar alteori negată, cum este cazul formulei $(a \supset b)$. În ciuda faptului că părțile sale componente, respectiv a și b , pot fi înlocuite numai cu constante propoziționale atestate sau asertate, $(a \supset b)$ este, de cele mai multe ori, negată. Căci, în accepția intuiționistă oricât de tolerantă, ea va fi negată de exemplu în cazul cînd a e înlocuit cu α care prescurtează „ $1 + 2 = 3$ ”, iar b cu β care prescurtează „ $5 + 3 = 8$ ”. Acest lucru ar fi imposibil din perspectiva clasică a implicației materiale ; ambele componente fiind clasic adevărate.

În contextul logicii intuiționiste nu am întâlnit discuții în legătură cu *alte* operații logice decât: implicația, conjuncția, disjuncția și negația. Faptul că acestea sînt introduse comprehensiv face lipsită de sens intuiționist introducerea operațiilor logice prin joc combinatoric. În schimb, există variante, ca aceea a lui Griss, în care nu mai apare disjuncția¹⁰¹.

Eliminarea disjuncției este o consecință a eliminării negației, căci aceasta determină reducerea operațiilor la formele pozitive $a \supset b$, $a \wedge b$ și $a \vee b$, celelalte cazuri fiind imposibile. Dar, în această situație numai implicația și conjuncția au semnificații determinate. Admiterea disjuncției ($a \vee b$), în care a și b sînt întotdeauna adevărate, trebuie să coincidă cu atestarea sau asertarea ei, deci $\Box (a \vee b)$. Dar și conjuncția $a \wedge b$ semnifică același lucru. Numai implicația ($a \supset b$) poate fi falsă, în ciuda faptului că ambele sale componente sînt adevărate. Ea este falsă, de exemplu, atunci cînd construcția matematică pe care o exprimă un enunț prescurtat cu a nu presupune în același timp construcția matematică pe care o exprimă un enunț prescurtat cu b . O altă particularitate a logicii lui Griss o constituie, în mod evident, faptul că nu conține nici formule negate și nici formule consistente. Orice formulă din logica lui este întotdeauna adevărată.

În varianta lui Onicescu apare și disjuncția, dar fără enunțarea condițiilor de asertabilitate. „Disjuncția $P \vee Q$ între două propoziții P și Q este o propoziție din Σ_0 în același timp cu P și Q ”¹⁰². Ea trebuie să satisfacă anumite proprietăți (de idempotență, comutativitate și asociativitate). Dar aceleași condiții se impun și pentru conjuncție, ceea ce face ca distincția lor să apară abia în raport cu implicația, deci în cazul unor formule mai complexe.

h) *Semnificația generală a teoriei intuitive*

Metoda explicitării prin asertabilitate duce, în variantele lui Brouwer și Heyting, la patru tipuri de formule: (1) *asertate sau atestate*, ca $\Box (a \wedge b)$ și $\Box (a \vee b)$, (2) *atestare fără a fi asertate*, ca $\Box_t (a \vee \neg b)$ și $\Box_t (\neg a \vee b)$, (3) *consistente*, ca $\perp (a \supset b)$ și (4) *negate*, ca $\neg (a \wedge \neg b)$.

¹⁰¹ G. F. C. Griss, *Logique des mathématiques intuitionnistes sans négation*, Comptes rendus de l'Acad. Sc., Paris, 227, 1948, p. 947.

¹⁰² O. Onicescu, *op. cit.*, p. 47.

Ținând cont de semnificația specială a operațiilor intuiționiste poate fi precizat și tipul *altor* formule simple. Într-o logică *strictă* a matematicii intuiționiste toate formulele se obțin pornind de la generalizarea rezultatelor matematice obținute și, pe cât posibil, de la generalizarea raționamentelor utilizate. De regulă însă se pornește de la formule obișnuite în logica simbolică și se caută semnificația lor intuiționistă. Așa procedează, de exemplu, Kolmogorov¹⁰³ în legătură cu formula implicativă $a \supset (\neg a \supset b)$. Aceasta se dovedește foarte ușor că este de tipul (4), dacă se admite semnificația strictă a implicației. Într-adevăr $(\neg a \supset b)$ este o formulă de tipul (4), adică negată, care nu poate fi implicată de o variabilă atestată (a). Deci întreaga formulă trebuie negată.

În schimb, formula $a \supset (b \supset a)$, pe care Kolmogorov o consideră valabilă și care apare și la Heyting drept axiomă, nu poate fi de tipul (4) decât dacă se admite semnificația *cea mai puțin strictă* a implicației. Atunci $(b \supset a)$ este asertată, iar implicația între două aserțiuni, a și $(b \supset a)$, trebuie asertată. Dacă implicația este admisă numai cu semnificație strictă, atunci $(b \supset a)$ este consistentă, dar o aserțiune care nu implică o altă aserțiune, nu poate fi asertată.

Într-o situație asemănătoare se găsește și formula $\neg a \supset (a \supset b)$ care poate fi asertată numai în cazul în care ar fi asertate formule ca $(\neg a \supset \neg b)$ și $(\neg a \supset b)$, căci $(a \supset b)$ fiind consistentă poate să ducă prin substituție cu constante propoziționale atât la formule negate, cât și la formule asertate. Or, în mod normal, nu se poate ca $\neg a$ să implice o aserțiune (cînd $(a \supset b)$ ar fi asertat), iar faptul că o contradicție implică o altă contradicție nu prezintă nici un interes.

Toate acestea dovedesc faptul că, în ciuda definiției care se dă de regulă implicației intuiționiste, aceasta este tratată, în anumite cazuri, drept implicație materială, ceea ce face ca nu numai semnificația implicației, ci și aceea a variabilelor propoziționale intuiționiste, să fie denaturate.

Ce semnificație ar putea să aibă într-o logică a matematicii intuiționiste o formulă ca $a \supset (a \wedge a)$? Aceasta poate fi într-adevăr atestată în orice accepție, ca și $(a \supset a)$ sau $(a \vee a)$, dar în matematică, chiar și în cea uzuală, nu apar niciodată astfel de înșirări ale uneia și aceleiași propoziții. Ce-i drept, Heyting menționează faptul că o astfel de formulă trebuie acceptată ca valabilă în mod arbitrar (*Willkürlich als richtig angenommen*)¹⁰⁴. Dar acceptarea arbitrară

¹⁰³ A. N. Kolmogorov, *On the principle of excluded middle*, p. 420—421.

¹⁰⁴ A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, p. 45.

a unei formule nu are nimic comun cu maniera intuiționistă și încalcă în mod evident teza (IV). Mai precis, în ciuda lipsei de contradicție a unor astfel de formule, ele nu vor fi obținute niciodată pe linie directă, ca aserțiuni, și chiar dacă indirect, prin atestare, ele sînt admisibile, deci nu încalcă prescripțiile cerute de interpretarea intuiționistă a operațiilor logice, lor nu le mai corespunde ceva analog în matematica propriu-zisă. Dar aceasta înseamnă că este încălcată și teza (III), care garantează paralelismul matematico-lingvistic.

Probleme de același gen apar în legătură cu *multiplicarea negației*. S-a constatat deja faptul că negația în genere ridică probleme dificile în logica matematicii intuiționiste. Dubla și tripla negație nu fac decît să sporească aceste dificultăți.

Pe cale directă, asertivă nu poate fi obținută negația decît neintenționat, prin eroare. Ea, semnificînd faptul că o expresie contrazice altă expresie căreia îi corespunde o construcție matematică efectivă, se verifică pe cale indirectă.

Adăugarea de negații are sens numai în logica obișnuită, unde negația joacă rol de *inversator valoric*. $\sim p$ înseamnă „este fals p ”, iar p , putînd fi adevărat sau fals, înseamnă că $\sim p$ poate fi adevărată sau falsă. $\sim \sim p$ înseamnă „este fals că este fals p ”, ceea ce este echivalent cu simplul p (adică cu ceva adevărat sau fals). Tripla negație se reduce la simpla negație, respectiv $\sim \sim \sim p = \sim p$. Dar aceste reduceri, la p și $\sim p$, a oricărui șir de negații a lui p , pare, chiar și în logica obișnuită, ceva artificial și inutil.

În realitate, șirul negațiilor nu se adaugă arbitrar. Posibilitatea și chiar necesitatea aplicării de negații duble rezidă, în logica obișnuită, tocmai în *nedeterminarea valorică* a variabilei propoziționale. Aceasta permite *negarea ei ipotetică*, care se dovedește falsă, cînd variabila este înlocuită cu o propoziție adevărată, ceea ce necesită *negarea negației inițiale*.

În logica matematicii intuiționiste nu apar variabile propoziționale nedeterminate, ceea ce nu permite negarea lor ipotetică și deci nici dubla lor negare. Problema triplei negări se pune cu atît mai puțin.

Poate fi remarcat aici faptul interesant că admiterea intuiționistă a erorii, care garantează în fond utilizarea negației intuiționiste, permite mai degrabă *afirmarea ipotetică* a propozițiilor (respectiv asertarea lor ipotetică), care urmează să fie apoi *confirmată*, ceea ce sugerează o *afirmare a afirmării*.

Din acest punct de vedere, nu numai formule ca $\neg \neg a \supset a$ nu sînt acceptabile, ci și formule ca $a \supset \neg \neg a$, $\neg a \supset \neg \neg \neg a$

sau $\neg \neg \neg a \supset \neg a$, care nu au nici o semnificație atita timp cît prin „ $\neg$ ” nu se înțelege falsul, iar prin a se înțelege o variabilă care poate fi înlocuită numai cu propoziții asertate.

În cazul negației, ca și al implicației, se constată oscilații, la reprezentanții logicii intuiționiste, în legătură cu semnificația precisă a operației și a variabilei propoziționale pe care o determină. În mod obișnuit, „ $\neg$ ” trebuie să însemne cu totul altceva decît „ $\sim$ ”, ca și „ a ” față de „ p ”, dar multe formule acceptate în logicile intuiționiste dovedesc că aceste lucruri sînt ignorate. Aceasta este și cauza pentru care se reproșează intuiționiștilor faptul că exclud *arbitrar* anumite formule, acceptînd în schimb altele, echivalente cu acestea sau de forme asemănătoare. Respectarea strictă a tezelor intuiționiste justifică *neoesitatea* și oferă criterii precise ale excluderii acestor formule, dar nu direct, ci prin construcția efectivă a unei logici corespunzătoare matematicii intuiționiste.

Un caz special îl constituie și formula $(a \vee \neg a)$, care este de tipul (2), ca și $(a \vee \neg b)$, deci o formulă atestată fără a fi asertată. Dacă se admite acest lucru, atunci $(a \vee \neg a)$ *nu poate juca rolul corespunzător unei tautologii* din logica obișnuită (acest rol revenind formulelor de tipul (1) — asertate sau atestate). În același timp $(a \vee \neg a)$ *nu este o formulă negată*. Acest lucru corespunde întru totul tezei (VI).

Dar modul concret în care se lucrează de regulă cu disjuncția, în logicile intuiționiste, fără să se facă distincția dintre asertare și atestare, chiar modul în care o definește Heyting, ca asertabilă cînd *unul* dintre membri este asertat, nu mai justifică respingerea formulei $(a \vee \neg a)$, căci aceasta are în mod evident primul membru asertat. De aici decurge necesitatea excluderii lui $(a \vee \neg a)$ cu alte mijloace decît cele pe care le poate oferi o teorie intuitivă.

Logica matematicii intuiționiste, expusă în forma unei teorii intuitive, poate fi dezvoltată în continuare cu ajutorul mijloacelor formale obișnuite, ceea ce nu mai presupune nimic deosebit. Problema centrală era aceea de a obține forme de bază, cu semnificație strict intuiționistă, respectiv obținerea paralelismului matematico-lingvistic, a unui limbaj al matematicii intuiționiste și garantarea faptului că dezvoltarea lui ulterioară, cu mijloace pur logice, nu duce la construcția unui limbaj fictiv, fără o semnificație determinată. Dezvoltarea teoriei intuitive presupune în primul rînd condițiile de construcția a formulelor acceptabile, selectarea raționamentelor generale, a principalelor reguli de operație și apoi găsirea unor metode,

mai mult sau mai puțin simple, de decizie (de precizare a tipului de formulă obținută).

Logica matematicii intuiționiste, în calitate de teorie intuitivă este strict fundamentată pe tezele intuiționiste. Cu toate acestea, ea nu este o teorie unică. Ceea ce s-a urmărit pînă în acest moment a fost obținerea unei teorii generale, față de care cele cunoscute (variante de tip Brouwer, Heyting, Griss, Onicescu, Février — cu excepția celor speciale polivalente: Gonseth, Barzin, Errera) să poată fi încadrate și deci justificate.

Construcția efectivă a teoriei intuitive presupune depășirea punctului de vedere principal, adoptat în lucrarea de față. Paralelismul matematico-lingvistic trebuie nu numai garantat, justificat, fundamentat, ci și construit în mod efectiv. Dar aceasta nu mai este o activitate pur logică, ea revine mai degrabă matematicianului intuiționist decît logicianului. Iar în conformitate cu teza (I), ea este o activitate secundară, pe care acesta o îndeplinește numai în măsura în care încearcă expunerea rezultatelor și nu obținerea lor. Aceasta înseamnă că logica matematicii intuiționiste, ca teorie intuitivă, interesează totuși în mai mare măsură pe logician decît pe matematician. Altfel spus, fundamentele teoriei intuitive sînt mai importante decît construcția ei efectivă. Și dacă matematica intuiționistă nu are mare lucru de cîștigat de pe urma unei astfel de teorii, logica în genere are un profit substanțial.

Semnificația constantelor propoziționale intuiționiste, respectarea cu strictețe a paralelismului matematico-lingvistic, ne-a prilejuit distincția fundamentală dintre asertare și atestare. Pe baza acesteia am reușit să surprindem și să justificăm principalele subtilități legate de negarea constantelor propoziționale, cu variantele ei, de constantele propoziționale nedecidabile, de specificul variabilelor și al operațiilor logice intuiționiste.

Teoria intuitivă, astfel concepută, se dovedește suficientă pentru justificarea aserțiunilor de bază ale logicii intuiționiste și pentru infirmarea principiilor suspecte. Ea dovedește în același timp și faptul că ignorarea unei astfel de teorii intuitive determină inconsecvența în menținerea fermă a specificului intuiționist a variabilelor și a operațiilor logice și permite apariția unor formule arbitrare, perfecte din punct de vedere formal dar necorespunzătoare paralelismului matematico-lingvistic.

Teoria expusă conține însă numai ceea ce se numește de regulă „logica propozițiilor”. Ea este de fapt capitolul cel mai semnificativ

al logicii intuiționiste. Logica intuiționistă a „predicatelor” nu este însă o simplă aplicație a logicii propozițiilor, la care se adaugă cele două axiome specifice, cum ar reieși din Σ_{HV} , prezentat deja. Încadrarea ei într-o teorie intuitivă ridică de asemenea probleme interesante din punct de vedere logic. Cu toate acestea, logica predicatelor trebuie privită, în contextul lucrării de față, drept un capitol asupra căruia nu se insistă în mod special, urmărindu-se concentrarea asupra problemelor fundamentale ale logicii intuiționiste.

i) *Semnificația formelor predicative*

Despre constantele individuale intuiționiste ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$) și despre variabilele individuale intuiționiste ($a_i, b_i, c_i, \dots$) s-a vorbit deja (*vide* paragraful *b*). Introducerea lor nu ridică probleme speciale.

O constantă intuiționistă α_i prescurtează o expresie matematică $\mathfrak{A}_i$, care exprimă o construcție matematică A_i , conform relației

$$(6') \quad (A_i) \rightsquigarrow (\mathfrak{A}_i) \rightsquigarrow (\alpha_i)$$

Relația este analogă cu (6). Deosebirea constă în faptul că A_i este o construcție *simplă* de entități matematice, a cărei expresie $\mathfrak{A}_i$ nu poate lua o formă propozițională.

Din punct de vedere intuiționist nu există însă o deosebire esențială între construcțiile matematice de tip A și cele de tip A_i . Ambele sînt „adevăruri matematice”, sînt rezultate ale unui proces mental intuitiv. Dealtfel, construcția intuitivă A_i , căreia îi corespunde expresia „3”, este tot atît de complicată, în accepție intuiționistă, ca și construcția A , căreia îi corespunde expresia „ $2 + 1 = 3$ ”.

Cu toate acestea, la nivelul constantelor individuale intuiționiste nu apare problema distincției dintre *asertare* și *atestare*. Aceasta înseamnă că nu se poate vorbi de o *cale indirectă* de obținere a paralelismului matematico-lingvistic la nivelul constantelor intuiționiste. Într-adevăr, expresiile de tip $\mathfrak{A}_i$ pot fi simple semne hieroglifice, ca semnele numerelor naturale, care sînt *arbitrare*. Ele exprimă entități matematice numai în măsura în care aceste entități au fost construite deja. Deci ori de cîte ori apar expresii de tip $\mathfrak{A}_i$, se presupune că ele exprimă construcții efectuate deja. Mai precis, ele sînt expresii de tip $\mathfrak{A}_i$, în măsura în care exprimă astfel de construcții și *numai* în această măsură.

În consecință, constantele individuale intuiționiste prescurtează numai expresii de tipul amintit și joacă oarecum rol de „constante individuale asertate”. Dar acest fapt nu mai trebuie marcat printr-un semn special, căci indicele „ i ” este suficient. În orice caz, o constantă de tip α_i nu poate să prescurteze altceva decît expresii *matematice* de tip $\mathfrak{A}_i$.

Variabilele individuale intuiționiste reprezintă generalizarea constantelor individuale. O variabilă individuală intuiționistă $\mathfrak{A}_i$ poate fi înlocuită cu orice constantă individuală intuiționistă, respectiv cu orice constantă care prescurtează o expresie de tip $\mathfrak{A}_i$, care exprimă o construcție matematică A_i efectuată deja.

Nu am întîlnit nici o discuție în legătură cu *negarea* constantelor intuiționiste individuale, imposibilă în contextul căii directe (6') și nici în legătură cu *constante negative* intuiționiste. Aceasta înseamnă că, intuiționistic, nu are nici un sens denumirea de „numere negative”. Semnul „—”, care le însoțește, are deci semnificație pozitivă.

O problemă mai dificilă este aceea a introducerii *proprietăților*, reduse și ele la *proprietăți matematice*, cum ar fi: „impar”, „divizibil” etc., dintre care, unele sînt relaționale ca: „mai mare decît 4”, „egal cu 2” etc. B. von Rootselaar consideră însă că aceste proprietăți nu constituie construcții matematice propriu-zise. „Reprezentarea proprietăților”, pe care le au entitățile matematice nu mai este „o activitate fundamentală pur constructivă”¹⁰⁵. Fără să dezvolte acest punct de vedere, Rootselaar admite soluția lui G. Kreisel¹⁰⁶, după care proprietățile pot fi stabilite prin *compararea* a două construcții matematice.

Dar, în acest sens, nu numai construcțiile de tip A_i au proprietăți, ci și cele de tip A . Ceea ce înseamnă că proprietățile matematice, ale căror expresii le prescurtăm prin *constantele predicative* $P, Q, R, \dots$ pot fi asociate ambelor tipuri de construcții, și deci $P, Q, R, \dots$ pot fi asociate la rîndul lor atît constantelor de tip α_i , cît și a celor de tip α . Dar în acest caz, proprietățile în discuție trebuie să fie de *alt* tip. Acest lucru poate fi menționat printr-o notație specială, cum ar fi $P_i, Q_i, R_i, \dots$ pentru constantele care prescurtează expresiile proprietăților asociate construcțiilor de tip A_i . Datorită faptului că nu vom

¹⁰⁵ B. van Rootselaar, *Intuitives über den Intuitionismus*, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, 2, 1965, p. 158.

¹⁰⁶ Cf. G. Kreisel, *Foundations of intuitionistic logic*, in „Logic, methodology and philosophy of sciences”, Stanford, 1962.

intra în detaliile calculului cu predicate, facem abstracții de aceste distincții, precizînd doar faptul că, utilizînd numai constante individuale, constantele predicative $P, Q, R, \dots$ vor fi corespunzătoare acestora.

Obținerea proprietăților matematice prin comparare presupune cel puțin două construcții matematice. Una dintre cele mai simple proprietăți rezultă din compararea construcțiilor succesive UNU și DOI. Lui DOI i se poate asocia imediat proprietatea „succesorul lui UNU”. Esențial este aici, din punct de vedere intuïționist, că proprietatea matematică *nu poate să existe înaintea* construcțiilor matematice efective și nici *independent* de aceste construcții.

Comparînd deci expresiile predicative obișnuite de tip $F(a)$ cu cele intuïționiste de tip $P(a_i)$, constatăm (1) că F reprezintă o proprietate oarecare, pe cînd P numai o proprietate matematică și (2) că a reprezintă o constantă individuală oarecare, pe cînd a_i numai o constantă individuală matematică, respectiv o construcție matematică simplă.

Acest lucru nu este însă marcat întotdeauna, ceea ce face dificilă înțelegerea expresiilor predicative intuïționiste și imprimă un caracter arbitrar restricțiilor ulterioare. Heyting, de exemplu, care utilizează inițial pentru variabilele propoziționale notația $a, b, c, \dots$ folosește pentru expresiile predicative notația $a(x), b(x), c(x), \dots$, fără precizări suplimentare¹⁰⁷; ulterior, utilizînd notația $p, q, r, \dots$ pentru variabilele propoziționale introduce notația $p(x), q(x), r(x)$ pentru expresiile predicative¹⁰⁸. În aceste cazuri nu apare însă distincția dintre variabila propozițională și variabila predicativă. Această distincție este marcată de regulă în logicile obișnuite. Hilbert și Ackermann, de exemplu, notează variabilele propoziționale cu $A, B, C, \dots$, iar pe cele predicative cu $F, G, H, \dots$. După B. van Rootselaar, variabila propozițională stă pentru *construcții matematice efective*, iar cea predicativă pentru *proprietăți*, care se obțin prin compararea primelor. Aceasta înseamnă că în logica intuïționistă ar trebui să existe o diferență și mai accentuată între cele două tipuri de variabile. În plus, utilizarea lui x ca variabilă individuală poate să ducă la confuzii, el reprezentînd de regulă *orice* constantă individuală.

O altă neînțelegere poate să rezulte din faptul că, așa cum consideră Heyting, expresia predicativă ar reprezenta o construcție care presupune un obiect și o propoziție sau o proprietate (aceasta deoarece nu se poate face distincția respectivă). Rootselaar însă

¹⁰⁷ Cf. A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 21.

¹⁰⁸ Cf. A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, p. 103.

consideră că ceea ce se construiește este tocmai obiectul matematic cu proprietatea respectivă ¹⁰⁹. Aceasta înseamnă însă că nu se mai poate vorbi în termenii logicii obișnuite, unde forma predicativă reprezintă componentele (subiectul și predicatul) unei propoziții. Într-adevăr, $P(\alpha_i)$, în care P prescurtează expresia „par” corespunzătoare proprietății pe care o are construcția matematică a cărei expresie, să zicem „4” este desemnată de constanta individuală α_i , este diferită și de alt tip decît simplul α (= constantă propozițională), care prescurtează expresii ca „ $2 + 2 = 4$ ” corespunzătoare unor construcții complexe de operații matematice și nu de obiecte matematice cu proprietățile lor.

Acestea sînt o parte dintre dificultățile legate de semnificația intuiționistă a formelor predicative, care de regulă sînt trecute cu vederea. Pentru a nu complica expunerea, reținem interpretarea lui B. van Rootselaar, care corespunde în mai mare măsură relației (6'), făcînd însă abstracție de problema introducerii proprietăților prin compararea a două construcții matematice.

j) Problema cuantificării

Spre deosebire de semnificația formelor predicative, care nu are o influență directă asupra *calculului* predicativ, interpretarea intuiționistă a cuantorilor a trezit interesul general. Cuantorii formalisti, $(\forall x) =$ „oricare ar fi x ” și $(\exists x)$ „există un x ” precizează formele predicative $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, ... care conțin variabile individuale. În limbaj formalist, acestea sînt numite „funcții propoziționale”. Dacă este precizat „domeniul” variabilei individuale, atunci prin cuantificare, fără altă specificare, se obține o expresie, adevărată sau falsă; același lucru se obține prin specificarea variabilei. $F(x)$, de exemplu, cu domeniul variabilei individuale „oameni” și proprietatea $\bar{F}$ = filozof, devine, prin specificarea lui x , adevărată în cazul cînd x este înlocuit cu „Socrate” și falsă cînd x este înlocuit cu „Pericle”, căci intra-devăr Socrate a fost filozof, pe cînd Pericle nu. Tot astfel prin cuantificare se obține $(\forall x) F(x)$ și $(\exists x) F(x)$. Dacă este vorba de același domeniu de indivizi și aceeași proprietate, atunci $(\forall x) F(x)$ este falsă, căci nu orice om este filozof, în timp ce $(\exists x) F(x)$ este adevărată, căci există cel puțin un om care să fie filozof.

¹⁰⁹ B. van Rootselaar, *op. cit.*, p. 159.

Prima restricție intuiționistă se referă la domeniul variabilei individuale. Există *două* și numai două domenii intuiționiste admisibile: unul este domeniul construcțiilor matematice mentale redate prin $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$, adică domeniul construcțiilor simple exprimabile prin cifre și domeniul construcțiilor complexe, a operațiilor cu construcții simple, redate prin $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Distincția permite utilizarea acestor semne și a variabilelor $a_i, b_i, c_i, \dots$ și respectiv $a, b, c, \dots$, astfel încît orice formă predicativă intuiționistă își are domeniul precizat prin însăși construcția ei.

Conform acestei restricții se poate conchide că formele predicative obișnuite $F(x), F(y), F(z), \dots$ sînt mai generale decît cele intuiționiste, respectiv $P(a_i), P(b_i), P(c_i), \dots$ sau $P(a), P(b), P(c), \dots$. Altfel spus, formele predicative intuiționiste sînt *particularizări* ale formelor predicative obișnuite. Același lucru este valabil și cu privire la „proprietăți”. Cele obișnuite $F, G, H, \dots$ pot fi proprietăți oarecare, pe cînd cele intuiționiste $P, Q, R, \dots$ sînt *numai* proprietăți ale construcțiilor matematice mentale.

Heyting consideră că o formulă $(\exists x) A(x)$ nu poate avea alt înțeles decît: Poate fi construit un obiect matematic x , care satisface condiția $A(x)$.¹¹⁰ Tot la Heyting găsim însă și formularea „ $(\exists x) A(x)$ nu semnifică altceva decît un obiect matematic b , astfel încît $A(b)$ a fost deja construit”¹¹¹.

Fiind vorba de „obiecte matematice” nu are sens utilizarea lui x , care desemnează „obiecte în genere”. Formulele intuiționiste existențiale vor avea deci forma

$$(\exists a_i) P(a_i), (\exists b_i) P(b_i), \dots \text{ sau } (\exists a) P(a), (\exists b) P(b), \dots$$

Dar „poate fi construit” și „a fost construit” sînt condiții diferite de simplul „există”. Ceea ce este comun în formulări ar fi doar „un”: există *un*..., a fost construit *un*...

B. van Rootselaar simte nevoia să introducă un semn special în locul lui „ $\exists$ ” și anume „ U ”. Formula existențială apare la el în forma $(Ux)A(x)$. Și P. Destouches-Février a simțit nevoia introducerii unui semn diferit de cel formalist și anume „ P ”¹¹², astfel încît formula

¹¹⁰ A. Heyting, *Some remarks on intuitionism*, în : „Constructivity in mathematics”, Amsterdam, 1959, p. 70.

¹¹¹ A. Heyting, *Remarques sur le constructivisme*, p. 177 și A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, p. 103.

¹¹² P. Destouches-Février, *Sur l'intuitionisme et la conception constructive*, p. 82.

devine $(Px)A(x)$. Prin $(Ux)A(x)$ B. van Rootselaar înțelege : „dispun de o demonstrație, respectiv o construcție, prin intermediul căreia pot construi un obiect cu proprietatea A ”¹¹³. Se observă că în această formulare este vorba de *două* construcții.

Conform primelor teze intuiționiste este însă clar că nu poate să existe nimic înainte de a fi construit mental. Deci nu poate să existe nici proprietate înaintea construcției. Dacă reținem doar pe „un” din accepția obișnuită a lui „ $\exists$ ”, atunci putem utiliza litera „E”, de la „E $\forall$ ” = un, cu accepția „dispunem de un...” sau „a fost efectuat un...” Formula $(E a_i)P(a_i)$ înseamnă atunci : „dispunem de o construcție a_i care are proprietatea P ” sau „a fost efectuată o construcție a_i care are proprietatea P ”. Dacă P înseamnă „divizibil”, atunci $(E a_i)P(a_i)$ înseamnă „a fost construit un număr care este divizibil”. Cu alte cuvinte, „E” semnifică „există efectiv” spre deosebire de „ $\exists$ ” care poate să semnifice și o existență probabilă. Cuantificatorul existențial intuiționist este deci o *particularizare* a celui obișnuit.

În legătură cu cuantificarea generală, Heyting, consideră că $(\forall x)A(x)$ înseamnă „ori de câte ori a fost construit un obiect matematic, el satisface $A(x)$ ” sau „dispunem de o metodă generală de construcție astfel încît orice element a din domeniul Q acceptă prin specializare construcția $A(a)$ ”. Domeniul Q pune aici în evidență faptul că domeniul general al construcțiilor simple $a_i, b_i, c_i, \dots$ poate fi împărțit în *subdomenii*, ca domeniul numerelor naturale, domeniul numerelor pare, al celor impare ș.a.m.d.

B. van Rootselaar și P. Destouches-Février introduce semne speciale pentru cuantorul general. Pentru Rootselaar $(\cap x)A(x)$ semnifică „dispunem de o demonstrație (construcție) care pentru fiecare construcție a unui x atrage după sine reprezentarea lui A ”. Février specifică faptul că în cazul în care domeniul lui x este infinit, acel *fiecare* sau *oricare ar fi* nu poate avea semnificație intuiționistă, căci niciodată nu poate fi construită o colecție infinită de obiecte.

Ca și în cazul precedent, ceea ce rămîne din semnificația lui „ $\forall$ ” este *oricare*, pe care îl vom nota cu „ Π ” de la $\Pi\forall$ = oricare. Vor apărea astfel formule ca $(\Pi a_i)P(a_i)$, care înseamnă : „oricare dintre construcțiile realizate a_i ale unui domeniu Q are proprietatea P ”. Dacă P înseamnă „divizibil” iar Q = domeniul numerelor pare mai mare decît 2, atunci $(\Pi a_i)P(a_i)$ va însemna „oricare număr par construit deja mai mare decît doi este divizibil”.

¹¹³ B. van Rootselaar, *op. cit.*, p. 159.

Quantificatorul general intuiționist reprezintă deci o *particularizare* a celui obișnuit. Primul se referă la *oricare dintre* construcțiile matematice realizate deja, în timp ce ultimul se poate referi la *orice* construcții sau obiecte existente, inexistente sau posibile.

În calitate de particularizări, formulele predicative intuiționiste determină anumite particularități ale calculului predicativ intuiționist. Unele dintre acestea sînt legate de *semnificația predicativă a negației*.

De obicei nu se face nici o distincție între negația utilizată în logica propozițiilor și *negațiile* utilizate în logica predicatelor. Situația este aceeași și în logica intuiționistă a predicatelor. Aici apar formule ca $\neg (E a_i) P(a_i)$ și $(E a_i) \neg P(a_i)$. Negația din $\neg (E a_i) P(a_i)$ poate fi identificată cu negația unei variabile propoziționale, respectiv $\neg a$. În acest caz, ar însemna că „negăm faptul că a fost construit un a_i cu proprietatea P ”. Negația din $(E a_i) \neg P(a_i)$ este însă de alt gen. Expresia înseamnă că „a fost construit un a_i care nu are proprietatea P ”, sau „a fost construit un a_i care are proprietatea $\neg P$ ”. Cele două semnificații nu sînt echivalente. La intuiționisti se vorbește însă despre „proprietăți negative” (*negative eigenschappen*) ceea ce ar însemna că trebuie menținută *numai* a doua semnificație. Dar, în acest caz, este evident că o proprietate negativă nu poate fi identificată cu o expresie negată. Aici ar trebui introdus un semn special pentru negație. Lipsa acestui semn a dus la o dispută, în realitate neîntemeiată, între Brouwer și adepții logicii intuiționiste fără negație.

Brouwer susține că există proprietăți negative¹¹⁴, de unde conchide că „nu este posibilă eliminarea negației din matematică”¹¹⁵. Într-adevăr, el demonstrează că poate fi construit un număr real ρ , definit printr-o succesiune infinită de numere raționale $a_1, a_2, a_3, \dots$ astfel încît nu este posibil să se demonstreze nici $\rho > 0$ nici $\rho < 0$, în schimb ρ se dovedește a avea proprietatea negativă „non egal cu zero” ($\neq 0$). Dacă notăm cu P proprietatea „egal cu zero” ($= 0$) atunci obținem pentru domeniul $Q =$ numere reale $(E a_i) \neg \neg P(a_i)$. Griss¹¹⁶ și D. van Dantzig¹¹⁷ atacă teza lui Brouwer utili-

¹¹⁴ L. E. J. Brouwer, *Essentieel-negatieve eigenschappen*, Indagationes Mathematicae, X, p. 322.

¹¹⁵ B. van Rootselaar, *Intuition und Konstruktion*, Studium Generale, 3, 1966, p. 181.

¹¹⁶ G. F. C. Griss, *La mathématique intuitioniste sans negation*, Nieuw Archief voor Wiskunde, III, 1955, p. 137.

¹¹⁷ D. van Dantzig, *Comments on Brouwer's theorem on essentially-negative predicates*, Indagationes Mathematicae, pp. 949–951.

zind în cele din urmă argumente antiintuitioniste, reproșind, fără o serioasă justificare, faptul că Brouwer ar utiliza argumente „subiectiviste”. D. van Dantzig atacă de exemplu termenul de „subiect creator”, a cărui abandonare lasă deschisă interpretarea platonice a entităților matematice și chiar termenul „absurd”, echivalent cu „negație”. Însă în mod normal admiterea unei logici fără negație nu trebuie să însemne infirmarea conceptului de negație în genere.

În realitate, dacă se introduce un semn special pentru proprietatea negativă sau negarea proprietății, să zicem semnul $\neg_p$, atunci este evident că admiterea expresiilor de tip $(E a_i) \neg_p P(a_i)$ nu înseamnă și admiterea expresiilor de tip $\neg (E a_i) P(a_i)$.

Dacă se precizează ce înseamnă *asertarea* și *atestarea* unei forme predicative, analogă celei propoziționale, atunci este ușor de constatat că formele predicative care conțin semnul „ $\neg$ ” nu pot fi asertate, dar pot fi în schimb atestate, tot așa formulele care conțin semnul „ $\neg_p$ ”.

În cazul asertării se obține o logică predicativă fără „ $\neg$ ” și „ $\neg_p$ ”. În cazul atestării se obține fie o logică cu „ $\neg$ ” și „ $\neg_p$ ”, fie o logică cu „ $\neg$ ”, dar fără „ $\neg_p$ ”. Poate fi concepută, după cum s-a menționat și o logică cu „ $\neg_p$ ” dar fără „ $\neg$ ”, aceasta nu rezultă însă din accepțiunile asertării și atestării. Într-adevăr, poate fi concepută o logică fără negație, respectiv fără „ $\neg$ ”, în care unele proprietăți să fie definite ca negații ale altor proprietăți sau ca proprietăți negative, așa cum apar, de altfel, în limbajul uzual. Se înțelege că atât „par”, cât și „non-par” sînt proprietăți pozitive. Cu toate acestea „non-par” poate fi considerat negația proprietății „par” sau o proprietate negativă. În această accepție, dacă notăm cu P „par” și cu Q „impar”, atunci obținem automat $\neg_p P = Q$ și $\neg_p Q = P$. Acesta este cazul cel mai simplu în care se poate admite sau nu „ $\neg_p$ ”, fie într-o logică cu negație, fie într-una fără negație.

Există însă situații în care proprietăți negative nu-i corespunde o singură proprietate pozitivă. De exemplu, lui „non egal cu zero”, din situația descrisă de Brouwer, îi corespunde sau „mai mare decît zero” sau „mai mic decît zero”. Dacă notăm cu P „egal cu zero”, cu Q „mai mare decît zero” și cu R „mai mic decît zero”, obținem $\neg_p P = Q \vee R$. Aceasta înseamnă că formula $(E a_i) \neg_p P(a_i)$ poate fi înlocuită cu $(E a_i) Q(a_i) \vee R(a_i)$ și invers. Ceea ce vrea să demonstreze Brouwer este faptul că dacă domeniul variabilei a_i este acela al numerelor raționale, iar proprietățile corespunzătoare lui $\neg_p P$ sînt contradictorii, respectiv Q sau $\neg_p Q$ atunci echivalența

$$(25) \quad (E a_i) \neg_p P(a_i) = (E a_i) Q(a_i) \vee \neg_p Q(a_i)$$

nu mai are loc, deoarece are loc

$$(26) \quad (E a_i) Q(a_i) \vee \neg_p Q(a_i) \supset (E a_i) \neg_p P(a_i)$$

dar nu mai are loc

$$(27) \quad (E a_i) \neg_p P(a_i) \supset (E a_i) Q(a_i) \vee \neg_p Q(a_i).$$

Din această cauză, se poate considera că demonstrația lui Brouwer nu este suficientă pentru introducerea proprietăților negative ca „esențiale”, căci se dovedește într-adevăr că este necesar $\neg_p P$, dar numai cînd se admite deja, în prealabil, existența lui $\neg_p Q$. Or, existența lui $\neg_p Q$ are nevoie la rîndul ei de o altă demonstrație.

Această demonstrație reprezintă, pe de altă parte o încercare de a respinge *tertium non datur* la nivelul lui „ $\neg_p$ ”.

A. Reymond aplică și la acest nivel (al formulelor predicative) restricțiile valorice impuse de respingerea legii terțului exclus¹¹⁸. El consideră că, în cazul în care constanta individuală α_i , presupune o infinitate de construcții, nu se poate decide dacă $P(\alpha_i)$ este adevărată sau nu, respectiv dacă o construcție ipotetică are sau nu o anumită proprietate. Nu se poate decide, consideră el, dacă construcția exprimată prin „ $2^x + 1$ ” are proprietatea „par”.

Restricțiile valorice cad de la sine dacă se pornește nu de la proprietăți către construcții, ci invers. Dacă x din „ $2^x + 1$ ” poate să fie orice număr natural, este evident că lui „ $2^x + 1$ ” îi corespund o infinitate de construcții, care nu pot fi realizate efectiv.

Heyting observă, în legătură cu negația, faptul că $\neg \neg (\Pi a_i) P(a_i)$ nu este echivalent cu $(\Pi a_i) \neg_p \neg_p P(a_i)$, ceea ce înseamnă necesitatea diferențierii celor două tipuri de semne. Este evident de asemenea că nu sînt echivalente nici $\neg (E a_i) P(a_i)$ și $(E a_i) \neg_p P(a_i)$, căci are loc implicația

$$(28) \quad (E a_i) \neg_p P(a_i) \supset \neg (E a_i) P(a_i)$$

— de exemplu, din faptul că „a fost contruit un număr care este non rațional” (cînd P înseamnă „rațional”) urmează că „nu a fost construit un număr care este rațional” —, dar nu are loc implicația

$$(29) \quad \neg (E a_i) P(a_i) \supset (E a_i) \neg_p P(a_i),$$

¹¹⁸ A. Reymond, *La fonction propositionnelle en logique algorithmique et le principe du tiers exclu*, Verhandlung des Int. Math. Kongresses, Zürich, 1932, Bd. II, p. 347.

căci din faptul că „nu a fost construit un număr rațional” nu urmează că „a fost construit unul non rațional”. O situație analogă apare în cazul cuantificatorului general.

Din această cauză, Heyting încearcă să respingă *negatio duplex* fără să apeleze la „ $\neg_p$ ”. El consideră că $(\exists a_i) P(a_i)$ are altă semnificație decît $\neg \neg (\exists a_i) P(a_i)$. Într-adevăr, din „faptul că se neagă faptul că nu a fost realizată o construcție matematică cu proprietatea P ” nu urmează că „a fost realizată efectiv o astfel de construcție”, deci formula

$$(30) \quad \neg \neg (\exists a_i) P(a_i) \supset (\exists a_i) P(a_i)$$

nu poate să aibă loc.

Se constată de asemenea că nu mai sînt valabile unele formule intuicioniste corespunzătoare următoarelor echivalențe formaliste

$$(31) \quad (\forall x) F(x) = \sim (\exists x) \sim F(x)$$

$$(32) \quad (\exists x) F(x) = \sim (\forall x) \sim F(x).$$

Într-adevăr, intuicionistic nu poate să aibă loc

$$(33) \quad (\Pi a_i) P(a_i) = \neg (\exists a_i) \neg_p P(a_i),$$

căci deși are loc

$$(34) \quad (\Pi a_i) P(a_i) \supset \neg (\exists a_i) \neg_p P(a_i)$$

nu are loc inversa

$$(35) \quad \neg (\exists a_i) \neg_p P(a_i) \supset (\Pi a_i) P(a_i).$$

Ultima formulă, înseamnă: din „negarea faptului că a fost contruit un număr cu proprietatea $\neg_p P$ ” nu urmează că „orice număr construit are proprietatea P ”. Tot astfel, nu poate să aibă loc formula

$$(36) \quad (\exists a_i) P(a_i) = \neg (\Pi a_i) \neg_p P(a_i),$$

căci are loc formula

$$(37) \quad (\exists a_i) P(a_i) \supset \neg (\Pi a_i) \neg_p P(a_i),$$

dar conversa ei nu poate fi admisă.

Aceste restricții rezultă direct din admiterea conceptului de „existență efectivă”. Fiecare membru al unei egalități, ca cele menționate, trebuie să fie construit efectiv. Aceasta înseamnă că, în principiu, construcția unui membru al egalității sau negarea lui nu înseamnă și construcția sau negarea celuilalt, decît în cazul în care cele două construcții ar fi identice.

Acestea sînt o parte dintre problemele deosebite din logica intuïționistă a predicatelor. Lor nu li se acordă, de regulă, prea mare importanță, datorită elaborării sistemelor formale intuïționiste. În cadrul acestora, formulele predicative se introduc pur și simplu, în manieră formalistă, cum a procedat și Heyting în Σ_{Hy} fără să mai fie pusă în discuție semnificația lor intuïționistă.

IV. TEORIA INTUIȚIONISTĂ A SISTEMELOR FORMALE

Teoria logică intuitivă a matematicii intuiționiste, prezentată în capitolul precedent, a fost construită pe baza tezelor intuiționiste (I — VI). O logică completă a matematicii intuiționiste trebuie să se bazeze însă și pe teza (VII). Conform acesteia, ar trebui construit un sistem axiomatic care să *descrie* în mod sistematic teoria intuitivă.

În „logica intuiționistă”, după cum s-a remarcat deja, lucrurile nu s-au petrecut astfel. Sistemele axiomatiche au precedat teoria intuitivă, care este încă în curs de elaborare. Mai mult, chiar au împiedicat elaborarea teoriei intuitive. Motivul principal rezidă în încălcarea tezei (VII). Într-adevăr, toate sistemele menționate au avut menirea de a *construi* „logica intuiționistă” și nu de a *descrie* în mod sistematic o teorie intuitivă preexistentă.

Conform tezei (VII) trebuie adăugat faptul că, intuiționistic vorbind, raportul dintre teoria intuitivă și sistemul formal nu este numai de succesiune în timp. Teoria intuitivă constituie garanția paralelismului matematico-lingvistic. Sistemul formal reprezintă, în acest sens, o *metateorie* = o *teorie sistematică a teoriei intuitive*. Însă teoria și metateoria, în sens formalist, nu sînt decît *parțial izomorfe*.

În teoriile intuitive obișnuite apar trei feluri de formule: consistente, inconsistente și valide sau tautologice. Scopul sistemelor axiomatiche este acela de a oferi mijlocul prin care pot fi obținute tautologiile. Expresiile consistente sau inconsistente apar numai ca părți constitutive ale tautologiilor, ceea ce nu se întîmplă de regulă în teoria intuitivă.

În teoria intuitivă intuiționistă, ca logică a matematicii intuiționiste, apar *patru* tipuri de formule, dintre care numai cele consistente au corespondent propriu-zis în logica formalistă. Formulele asertate sau atestate, ca și cele atestate fără a fi asertate și cele negate, făcînd abstracție de semnificația lor specială, pot, după formă, adică identificînd variabilele și operatorii intuiționiști cu cei obișnuiți, să

apară în toate cele trei posturi formaliste. Aceasta ar însemna, intuiționistic vorbind, că tautologiile nu au un statut privilegiat. Într-adevăr, după cum s-a remarcat deja, multe formule corespunzătoare, după formă, tautologiilor nu au nici o semnificație în logica matematicii intuiționiste.

Aceasta înseamnă că, în logica matematică intuiționistă, teoria intuitivă și sistemul formal corespund într-o și mai mică măsură decât în logica formalistă. Pentru o astfel de teorie intuitivă ar fi necesară elaborarea unui sistem formal *de alt tip* decât cel formalist, al cărui obiectiv îl constituie tautologiile. Dar un astfel de sistem nu este cunoscut încă. Cele prezentate deja sînt sisteme care diferă de cele formaliste obișnuite numai prin faptul că respectă teza (VI).

Cu toate acestea, sistemele prezentate nu sînt identice. Fundamentarea teoriei intuitive pe teze intuiționiste oferă unicul criteriu admisibil de apreciere a *valorii intuiționiste* a acestor sisteme. Σ_k și Σ_{G1} , de exemplu, în care se lucrează cu variabile și operatori obișnuți, respectă numai teza (VI) și are deci o valoare intuiționistă minimă. Σ_{Go} , adoptat de Gonseth, Barzin, Errera ș.a. are aceleași deficiențe (variabile și operatori formalști). În plus, introduce trivalența, care nu are corespondent în teoria intuitivă.

Numai Σ_{Hy} are legătură evidentă cu teoria intuitivă. Este vorba, în primul rînd, de variabilele propoziționale, care desemnează numai propoziții matematice și, în al doilea rînd, de operatorii care au semnificație intuiționistă. Dar, făcînd abstracție de aceste trăsături intuiționiste ale sistemului, cum se face de regulă, Σ_{Hy} nu diferă de celelalte sisteme formaliste decât, așa cum o spune Heyting însuși, „prin simpla bifare a unei axiome”¹¹⁹. În rest, majoritatea tautologiilor formaliste constituie, ca într-un sistem obișnuit, obiectul investigației, ceea ce nu mai corespunde teoriei intuitive. Ce-i drept, Heyting recunoaște acest lucru, mai mult, chiar faptul că, „nici un sistem formal nu poate fi un sistem intuiționist”¹²⁰.

În plus, lipsa prealabilă a unei teorii logice intuitive a făcut ca Σ_{Hy} să nu aibă nici măcar aplicațiile logice obișnuite ale unui sistem formalist. Pe de altă parte, în conformitate cu primele două teze intuiționiste, pe care nici un intuiționist autentic nu le încalcă, matematica intuiționistă s-a dezvoltat în continuare *independent*

¹¹⁹ A. Heyting, *Les fondements des mathématiques du point de vue intuitioniste*, în: „Philosophie mathématique”, Paris, 1939, p. 74.

¹²⁰ A. Heyting, *Logique et intuitionisme*, în: „Applications scientifiques de la logique mathématique”, Paris-Louvain, 1954, p. 74.

de Σ_{Hy} . Heyting însuși, în lucrarea sa de amploare (*Intuitionism. An introduction*, 1966) prezintă matematica intuiționistă independent de logică. Aceasta este plasată la sfârșitul lucrării și completată cu câteva aplicații asupra unor construcții matematice efectuate deja. Este de remarcat faptul că nici aceste aplicații nu au legătură cu Σ_{Hy} , ci cu teoria logică intuitivă, ceea ce dovedește că sistemul nu este operativ. Această situație a fost observată însă chiar de la început. Σ_{Hy} , odată construit, a fost considerat drept un simplu sistem formalist, căruia i s-au căutat diferite semnificații.

Interpretările, de regulă formaliste, ale sistemului Σ_{Hy} , nu sînt însă lipsite de interes; cu toate că nu mai au nici o legătură cu teoria logică intuitivă a matematicii intuiționiste și nici cu această matematică¹²¹. Ele au dus însă la rezultate formaliste remarcabile, iar în acest sens merită să fie amintite.

a) Interpretări ale sistemului Heyting

Interpreții formalisti ai sistemului Σ_{Hy} au făcut abstracție de semnificația intuiționistă a variabilelor și a operatorilor. Ei au obținut astfel un calcul formalist special pe care l-au comparat apoi cu calculul formalist obișnuit, numit și „clasic”.

Deoarece Σ_K și Σ_{Gl} sînt echivalente cu Σ_{Hy} , îi revine lui Kolmogorov meritul de a fi subliniat pentru prima dată că deosebirea dintre Σ_C (sistemul clasic) și un sistem de tip Σ_{Hy} constă în aceea că Σ_C are o axiomă în plus sau Σ_{Hy} are una în minus.

A. Kolmogorov, renunțînd ulterior la propriul său sistem, incomplet de altfel, interpretează sistemul Σ_{Hy} drept un „calcul al problemelor”, mai precis, el consideră că poate fi construit un calcul al problemelor, care „coincide ca formă cu logica intuiționistă a lui Brouwer, formalizată în ultimul timp de către domnul Heyting”¹²². Heyting consideră însă că această interpretare este „independentă de ipotezele intuiționiste”¹²³, ceea ce nu-l împiedică totuși să o adopte alături de propria lui interpretare, referitoare la construcțiile ipotetice.

¹²¹ A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 19.

¹²² A. Kolmogorov, *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, *Mathematische Zeitschrift*, 35, 1932, p. 58.

¹²³ A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 17.

Kolmogorov nu definește termenul „problemă”. El dă însă citeva exemple de probleme: (1) să se găsească patru numere întregi x, y, z, n , pentru care să fie satisfăcute relațiile $x^n + y^n = z^n$, unde $n > 2$; (2) să se demonstreze falsitatea tezei lui Fermat; (3) să se construiască un cerc prin trei puncte date (x, y, z) ; (4) Presupunind că este dată o rădăcină a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, să se afle cealaltă rădăcină. (5) Presupunind că numărul π este exprimat rațional prin funcția $\pi = n/m$ să se găsească o expresie analogă pentru numărul e . De aici urmează faptul că „problemele” sînt probleme matematice și că nu orice problemă poate fi rezolvată.

Una dintre dificultățile acestei interpretări o constituie faptul că atît constantele $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (în notația noastră) cît și operațiile cu constante devin probleme. Se poate vorbi astfel de problema α și de problema $(\alpha \wedge \beta)$. Expresiile mai complicate devin „probleme de probleme ale problemelor de...” ceea ce este lipsit de sens. În plus, Kolmogorov este nevoit să utilizeze și termenul de „soluție a unei probleme” pentru care nu introduce însă un simbol special.

În al doilea rînd, dacă constantele sînt probleme, variabilele vor fi variabile de probleme, iar operațiile cu variabile vor deveni generalizări ale operațiilor arbitrare cu probleme, ca: $(\alpha \wedge \beta) =$ „să se rezolve cele două probleme α și β ” devine $(a \wedge b) =$ „să se rezolve în genere două probleme diferite”, ceea ce este lipsit de sens.

Intenția lui Kolmogorov se dovedește a fi aceea de a reintroduce *prin interpretare*, ceea ce Heyting a exclus *prin formalizare* și anume expresiile nedecidabile, care la Kolmogorov devin „probleme nerezolvabile”. Dar, în felul acesta, expresiile nedecidabile apar numai la nivelul constantelor propoziționale, iar $(a \vee \neg a)$ nu poate fi exclusă decît în mod arbitrar, axiomatic. În rest, Kolmogorov admite axiomele, teoremele și, în genere, întregul sistem Σ_{Hy} .

P. Destouches-Février își propune să aprofundeze interpretarea lui Kolmogorov. Ea pornește de la noțiunea generală de „teorie deductivă”¹²⁴, ale cărei reguli de raționament constituie o logică care ar conține un calcul propozițional caracterizat prin operațiile $\&, \vee, \rightarrow, \sim$ și un calcul al problemelor caracterizat prin operațiile $\wedge, \vee, \supset, \neg$. A arăta că propoziția p este adevărată devine o problemă notată cu $Pb(p)$. A rezolva problema $Pb(p)$ înseamnă a stabili

¹²⁴ P. Destouches-Février, *Rapports entre le calcul des problèmes et le calcul de proposition*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. Paris, 220, 1945, p. 484.

adevărul lui p . În privința operațiilor se stabilesc definiții abreviative:

$$\text{Pb}(p) \wedge \text{Pb}(q) =_{df} \text{Pb}(p \& q)$$

$$\text{Pb}(p) \vee \text{Pb}(q) =_{df} \text{Pb}(p \vee q)$$

$$\text{Pb}(p) \supset \text{Pb}(q) =_{df} \text{Pb}(p \rightarrow q)$$

La acestea se adaugă relația

$$\neg \text{Pb}(p) \supset \text{Pb}(p \rightarrow (q \& \sim q)),$$

care caracterizează negația. Pe baza acestor definiții se poate conchide că „Fiecărei formule admise în calculul problemelor îi corespunde o formulă de aceeași formă, identic adevărată, din calculul cu propoziții, prin înlocuirea semnelor respective, dar pot exista formule identic adevărate în calculul propozițional care nu au formule corespunzătoare în calculul problemelor”¹²⁵. Această interpretare aduce noi perspective gnoseologice punctului de vedere expus de Kolmogorov, dar nu fără a extinde noțiunea de problemă, astfel încât (se observă din definiții) să se poată vorbi de probleme și în calculul propozițional obișnuit, ceea ce nu este cazul. Definițiile pun în evidență imprecizia, semnalată de Kolmogorov, în legătură cu distincția dintre „probleme” și „operații cu probleme” cărora li se adaugă aici „probleme ale operațiilor cu propoziții”. Formalizat se obține $\text{Pb}(p) = \text{problemă}$; $\text{Pb}(p) \wedge \text{Pb}(q) = \text{operație cu probleme}$; $\text{Pb}(p \& q) = \text{problemă a unei operații cu propoziții}$. La acestea se poate adăuga, în sensul lui Kolmogorov, și $\text{Pb}(\text{Pb}(p) \wedge \text{Pb}(q))$. Toate acestea pot fi dublate de formule cu „rezolvări ale problemelor”. În acest caz, apare inevitabil și „problema problemelor care nu pot fi rezolvate”, ceea ce duce în cele din urmă la consecințe tot mai îndepărtate de sistemul Σ_{Hy} .

Încercînd o interpretare și mai cuprinzătoare, P. Destouches-Février raportează calculul problemelor și calculul propozițiilor la un al treilea calcul, pe care îl numește „calculul construcțiilor”. Construcțiile, consideră ea, joacă un rol fundamental în matematicii. O problemă este considerată a fi, aproape în sensul lui Heyting, „o

¹²⁵ *Ibidem*, p. 485.

construcție care urmează să fie realizată”¹²⁶. O construcție realizată înseamnă o problemă rezolvată. Făcînd abstracție de noile complicații care se ivesc (dedublarea construcțiilor în intenționale și realizate, cît și a problemelor și apoi triplarea lor, respectiv : construcții imposibile, probleme nerezolvabile) se ajunge la concluzia că cele două calcule, al problemelor și al propozițiilor (în care apar totuși probleme, conform definițiilor amintite) sînt subordonate calculului construcțiilor. Ulterior, P. Destouches-Février revine asupra distincției dintre cele trei calcule. Important este faptul că stabilește de data aceasta că între calculul cu construcții și cel cu propoziții nu există izomorfism¹²⁷.

Kurt Gödel inițiază primele interpretări pur formaliste ale logicii intuiționiste și implicit ale sistemului Σ_{Hy} . El adaugă opiniei lui Glivenko, după care logica intuiționistă nu poate fi trivalentă¹²⁸, enunțul că „Nu există nici o realizare cu un număr finit de elemente (valori de adevăr), pentru care să fie satisfăcute formulele demonstrabile în Σ_{Hy} și numai acestea”¹²⁹ adică nu există o interpretare prin matrice *finite* de adevăr pentru expresiile calculului Σ_{Hy} . Problema este tratată pe larg de către A. Schmidt¹³⁰. Pe baza acestui enunț, Gödel consideră că între Σ_{Hy} și Σ_C (sistemul clasic) ar exista un număr infinit de alte sisteme. Problema a fost reluată de S. Jaskowski, care ajunge la concluzia că Σ_{Hy} poate fi tratat pe baza unei matrici de adevăr cu $n = \aleph_0$ valori de adevăr¹³¹.

Aceste interpretări formaliste, metalogice ale sistemului Σ_{Hy} nu contravin însă cu nimic teoriei intuitive a logicii intuiționiste. Din punct de vedere intuiționist, s-a dovedit posibilitatea elaborării unei teorii intuitive (variantea lui Brouwer), în care să nu se opereze cu valori de adevăr ; din punct de vedere formalist se demonstrează că una dintre sistematizările formale ale acestei logici, respectiv Σ_{Hy} , conține expresii care nu pot fi interpretate valoric.

¹²⁶ P. Destouches-Février, *Connexions entre les calculs des constructions, des problèmes, des propositions*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. Paris, 228, 1949, p. 31.

¹²⁷ P. Destouches-Février, *Sur l'intuitionisme et la conception strictement constructive*, *Indagationes mathematicae*, XIII, 1951, p. 85.

¹²⁸ M. V. Glivenko, *Sur la logique de M. Brouwer*, p. 225.

¹²⁹ K. Gödel, *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 4, 1933, p. 40.

¹³⁰ A. Schmidt, *Mathematische Gesetze der Logik*, Springer-Verlag, 1960, pp. 369—372.

¹³¹ S. Jaskowski, *Recherches sur le système de la logique intuitioniste*, *Actualités scient. et ind.*, 393, Paris, 1936.

Gödel încearcă și o transcriere a expresiilor intuiționiste în termenii uzuali din logica obișnuită a propozițiilor. Transcrierea este asemănătoare celei încercate (ulterior) de către Destouches-Février. Deosebirea constă în aceea că noul concept introdus „ p este demonstrabil”, notat Bp , care va deveni la Destouches, Février „ p este o problemă”, notat $Pb(p)$, nu figurează în logica intuiționistă, ci este introdus numai în logica obișnuită, căreia i se adaugă următoarele axiome:

$$(A_1) \quad Bp \rightarrow p$$

$$(A_2) \quad Bp \rightarrow B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq$$

$$(A_3) \quad Bp \rightarrow BBp$$

Gödel consideră că sistemul clasic care conține conceptul „ p este demonstrabil”, pe care îl notăm Σ_{Cb} poate fi dedus din Σ_{Hy} prin transcrierea conceptelor de bază¹³². Se obține următoarea corespondență:

$$\neg p \quad \sim Bp$$

$$p \supset q \quad Bp \rightarrow Bq$$

$$p \vee q \quad Bp \vee Bq$$

$$p \wedge q \quad Bp \& Bq$$

Invers, trecerea de la Σ_{Cb} la Σ_{Hy} are loc numai în măsura în care Σ_{Cb} nu urmează transcrierea formulei $(p \vee \sim p)$.

Contribuția lui Gödel este de mare importanță. Ea pune în evidență faptul că nu este suficientă excluderea arbitrară a legii terțului exclus pentru ca Σ_c să devină Σ_{Hy} , ci este necesară și o interpretare specială a variabilelor. Cea propusă de Gödel este însă destul de vagă. Expresia Bp sugerează excluderea din cadrul lui Σ_c a tuturor propozițiilor care nu pot fi demonstrate, sau negarea lor, respectiv $\sim Bp$. Aici nu se specifică dacă este vorba de propoziții matematice

¹³² K. Gödel, *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkül*, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4, p. 39.

sau de propoziții obișnuite. În plus, rămâne deschisă problema propozițiilor care nu sînt nici Bp nici $\sim Bp$. Pentru a evita aceste dificultăți, Gödel consideră că Σ_{cb} este echivalent cu sistemul implicației stricte al lui Lewis, dacă Bp este transcris prin $\Box p$ (este necesar p) și dacă la sistemul lui Lewis se adaugă postulatul lui Becker, respectiv $(\Box p \prec \Box \Box p)$, unde „ $\prec$ ” este semnul implicației stricte.

1°. Interpretări modale ale sistemului Σ_{BV}

O. Becker încercase și el o astfel de interpretare¹³³, care diferă de transcrierea lui Gödel prin faptul că aici negația intuiționistă este identificată cu negația posibilității, respectiv $\sim \Diamond$, ceea ce înseamnă că lui $\sim Bp$ (Gödel) nu-i corespunde $\sim \Box p$, ci $\sim \Diamond p$. De unde rezultă că demonstrabil ar însemna *posibil* nu *necesar*.

O interpretare intermediară apare la McKinsey și A. Tarski¹³⁴. Ei mențin Bp în accepția lui Gödel, respectiv $\Box p$, dar interpretează negația intuiționistă prin $\sim \Diamond$ în accepția lui Becker, iar implicația intuiționistă prin implicația strictă.

Interpretarea modală a logicii intuiționiste, în special a calculului cu predicate, cunoaște astăzi o dezvoltare surprinzătoare, în special, datorită contribuției lui S. Kripke. Acesta introduce noțiunea de „teorie a modelelor” prin „analiza semantică a logicii modale”¹³⁵. Conceptul de „model” corespunde aici conceptului de „forcing” utilizat de P. Cohen în teoria mulțimilor¹³⁶. Pe de altă parte, Kripke utilizează rezultatele obținute de E. W. Beth prin interpretarea semantică a logicii intuiționiste și utilizează în același timp un sistem de tip modal ($S4$), apropiat de cel al lui Lewis. Toate acestea au dus la elaborarea unor sisteme formaliste care sînt cultivate în sine și pentru sine și care nu mai au practic nici o legătură cu logica matematicii intuiționiste. M. C. Fitting, care tratează pe larg astfel de probleme, oferă, pe baza unei lucrări a lui K. Schütte¹³⁷, o transcriere

¹³³ Cf. O. Becker, *Zur Logik der Modalitäten*, Jahrbuch für Philosophische und Phenomenologische Forschung, 11, 1930.

¹³⁴ J. C. C. McKinsey and A. Tarski, *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, Journal of symbolic logic, 13, 1948.

¹³⁵ Cf. S. Kripke, *Semantical analysis of modal logic I*, Zeitschrift für Math. Logik und Grundl. der Math., 9, 1963.

¹³⁶ P. Y. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. of the National Acad. of Sc., U.S.A., 50, 1963.

¹³⁷ K. Schütte, *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*, Springer-Verlag, 1968.

prin definiții abreviate ale formulelor din Σ_{Hy} în Σ_{S4} . Redăm transcrierea, în notația noastră, astfel :

p	$\Box p$
$(p \vee q)$	$(p) \vee (q)$
$(p \wedge q)$	$(p) \wedge (q)$
$\sim p$	$\Box \sim p$
$p \supset q$	$\Box (p \supset q)$

Raportul dintre Σ_{Hy} și Σ_{S4} poate fi rezumat astfel : „Dacă p este o formulă intuiționistă, atunci p este validă în Σ_{Hy} dacă și numai dacă mulțimea formulelor de tip p este validă în Σ_{S4} ¹³⁸. Se constată aici faptul că sînt utilizate, în ambele sisteme, aceleași semne pentru operatorii logici și aceleași variabile. Deosebirea constă numai în adaosul modal sau jocul parantezelor. Aceasta înscamnă pierderea distincțiilor introduse de către Gödel. Într-adevăr, Gödel este consecvent în a reinterpreta variabilele intuiționiste fie că sînt independente : p devine Bp , fie că sînt legate : $(p \wedge q)$ devine $(Bp \& Bq)$. Trebuie remarcat și faptul că semnele pentru operatori, utilizate în logica intuiționistă, sînt frecvent utilizate și în logica formalistă, fără nici o interpretare specială.

Raportul dintre Σ_{Hy} și Σ_{S4} , semnalat de Fitting pune în evidență unele probleme, urmărite în special prin interpretările modale, cum ar fi *problema completitudinii* și *problema deciziei* în cadrul logicii intuiționiste. K. Schütte enunță următorul principiu : „Dacă o formulă a logicii propozițiilor este valabilă în orice model finit al logicii intuiționiste a propozițiilor, atunci ea este deductibilă intuiționistic” ¹³⁹. O formulă oarecare se numește *valabilă* într-un model, dacă modelul este *posibil* pentru formula respectivă. O formulă se numește *general-valabilă* dacă este valabilă în orice model posibil. O formulă se numește *realizabilă* într-un model, dacă modelul este posibil pentru acea formulă. Altfel spus „o formulă este *realizabilă*, dacă există un model, în care ea este realizabilă” ¹⁴⁰. Se ajunge astfel,

¹³⁸ M. C. Fitting, *Intuitionistic logic, model theory and forcing*, Amsterdam, 1969, p. 43.

¹³⁹ K. Schütte, *op. cit.*, p. 51.

¹⁴⁰ *Ibidem*, p. 53.

în funcție de generalitate, finitate, valabilitate și realizabilitate la următoarele tipuri de formule :

- I. Formule general-valabile,
- II a. Formule finit general-valabile,
- II b. Formule general-realizabile,
- III. Formule finit general-realizabile (general valabile în mod clasic),
- IV. Formule realizabile finit (clasic realizabile),
- V. Formule realizabile ¹⁴¹.

De exemplu formula $(p \vee \neg p)$ este *general realizabilă* (II b) dar nu este *finit general-valabilă* (II a). Formula $(\exists x) \neg \neg (Px) \rightarrow \neg \neg (\exists x)(Px)$ din logica predicatelor este *finit general-valabilă* (II a), însă nu este general-realizabilă (II b). Dacă notăm cu A ultima formulă, atunci formula $(A \vee \neg A)$ este *general-realizabilă* (II b) și *finit-valabilă* (II a), dar nu este *general-valabilă*. (I).

Făcând abstracție de celelalte concepte, reținem că „o formulă este realizabilă, dacă există un model, în care ea este realizabilă”. Se observă aici *deplasarea* problematicii intuiționiste din cadrul ei propriu în cadrul modelelor. În genere, toate interpretările modale ale logicii intuiționiste, prin modele sau *forcing* sînt de tip formalist. Ele pun în evidență imposibilitatea tratării ca atare a logicii intuiționiste numai cu mijloace clasic-formaliste. Pentru a-și putea realiza scopul (elaborarea de sisteme formaliste) formalistul este nevoit să traducă mereu în termeni formalști expresiile intuiționiste. Dar, în acest fel, se ajunge la situația paradoxală în care o formulă intuiționistă este realizabilă, adică are în fond „dreptul la existență”, dacă există un model în care să fie realizabilă. Or, din punct de vedere intuiționist este absurd să se vorbească de formule care ar preexista interpretării lor.

Se pornește deci de la expresii intuiționiste, cum ar fi $\neg a$, $(a \wedge b)$ ș.a.m.d.; se interpretează formalist variabilele și se obține $\neg p$, $(p \wedge q)$, ...; se interpretează formalist operatori și se obține $\sim p$, $(p \& q)$, ... se reinterpretează variabilele în diferite variante modale și se obține $\sim \Box p$ sau $\sim \Diamond p$ sau $\Box \sim p$ pentru negație și $(\Box p \& \Box q)$ sau $(\Diamond p \& \Diamond q)$ sau $(p) \wedge (q)$ și în fine se ajunge la modelele semantice ale modalității, după care se consideră că expresiile intuiționiste, respectiv existența și proprietățile lor ar fi în funcție de aceste modele. Aceasta înseamnă, cu alte cuvinte, că formalistul nu

¹⁴¹ *Ibidem*, p. 58.

admite nici o expresie din logica intuiționistă pînă cînd nu-i găsește o interpretare formalistă.

Logica matematicii intuiționiste nu are nimic de cîștigat de pe urma acestor interpretări, care se dovedesc arbitrare (dovadă multiplele variante modale), în schimb are de cîștigat *logica modală formalistă*. Într-adevăr, încercările de a interpreta modal logica matematicii intuiționiste a dus la subtilizarea analizei formalist-semantică a modalității. Astfel a apărut conceptul de model pentru formule propoziționale și predicative. Un model pentru o formulă propozițională este definit prin : (1) o mulțime care nu trebuie să fie vidă, (2) o relație binară în cadrul acestei mulțimi și (3) o funcție care asociază fiecărei variabile propoziționale din formulă o valoare de adevăr ¹⁴². Astfel se obțin modele de tip (M) în care relația binară este reflexivă și modele (S4) în care relația este reflexivă și tranzitivă. Pe baza acestora pot fi construite de exemplu *sistemele formaliste modale* ale logicii propozițiilor și *modele* ale sistemelor formaliste ale logicii propozițiilor.

Construcția sistemelor formaliste modale ridică însă o problemă care schimbă cu totul punctul de vedere discutat pînă acum. Reluînd etapele formaliste și considerînd, de data aceasta, logica intuiționistă ca sistem, obținem următorul proces : se pleacă de la Σ_{Hv} care este transcris într-un sistem modal (după Gödel ar fi sistemul Lewis + postulatul lui Becker, după Kripke și Fitting ar fi Σ_{S4} ; Kripke a încercat ulterior o interpretare a logicii intuiționiste independentă de Σ_{S4} ¹⁴³) apoi se fac considerații *asupra* sistemelor modale, pentru care sînt construite, în cele din urmă, modelele.

Cu ocazia penultimului moment, respectiv analiza sistemelor modale, K. Schütte constată că acestea pot fi la rîndul lor *tratate* intuiționist, chiar à la Brouwer ¹⁴⁴. Prin urmare, se ajunge la concluzia că, de fapt, nu logica intuiționistă este interpretată prin logica formalistă modală, ci dimpotrivă logica formalistă modală este cea tratată în mod intuiționist, cu toate că punctul de plecare a fost în aparență, logica matematicii intuiționiste. Dacă nu se admite acest lucru, atunci se ajunge la un cerc vicios : logica matematicii intuiționiste este studiată cu mijloacele logicii formaliste modale, iar logica formalistă modală este studiată cu mijloace intuiționiste. Este însă evident că punctul de plecare nu l-a constituit *logica matematicii*

¹⁴² Cf. *Ibidem*, p. 48 și p. 4.

¹⁴³ S. Kripke, *Semantical analysis of intuitionistic logic I*, în „Formal systems and recursive functions”, Amsterdam, 1965 p. 92.

¹⁴⁴ K. Schütte, *op. cit.*, p. 71.

intuïționiste, căci aceasta poate fi studiată în sine și nu necesită nici o altă interpretare în afară de cea pur intuïționistă. Punctul de plecare l-au constituit *germenii formalismului neointuïționist* care s-au manifestat, de la început, cu ocazia interpretării variabilelor și operatorilor din Σ_{Hy} . Drumul a fost deschis de către Gödel, deși interpretarea lui ar putea fi considerată drept „cea mai apropiată” de litera intuïționistă.

K. Schütte alătură deci sistemelor modale M (al lui von Wright), S_4 (Kripke) și S_5 (Lewis) sistemul Br (Brouwer)¹⁴⁵. Σ_{Br} reprezintă, o *restricție formalistă de tip intuïționist* aplicată, alături de altele (restricțiile cerute de Σ_{S_4} și Σ_{S_5}), sistemului general Σ_M . Restricția presupune, de data aceasta, adăugarea unei noi axiome. Axiomele sistemului Σ_M sînt *toate formulele propoziționale valabile* plus următoarele axiome de modalitate.

$$(A_1) \quad \neg \Box A \vee A$$

$$(A_2) \quad \neg \Box (\neg A \vee B) \vee \neg \Box A \vee \Box B$$

Regulile fundamentale de deducție sînt :

$$(R_1) \quad A, \neg A \vee B \Rightarrow B \text{ (modus ponens)}$$

$$A \Rightarrow \Box A \text{ (modalizarea)}$$

Sistemele Σ_{S_4} , Σ_{Br} și Σ_{S_5} au câte o axiomă suplimentară, respectiv :

$$(A_3) \quad \neg \Box A \vee \Box \Box A \quad (\Sigma_{S_4})$$

$$(A_4) \quad A \vee \Box \neg \Box A \quad (\Sigma_{Br})$$

$$(A_5) \quad \Box A \vee \Box \neg \Box A \quad (\Sigma_{S_5})$$

Literele A și B , utilizate, simbolizează variabile de formule. Se observă imediat faptul că, în realitate *toate* sistemele modale prezentate sînt introduse prin restricții formaliste de tip intuïționist, respectiv prin axiome care reprezintă *restricții modale privind aplicabilitatea legii terțului exclus*, ceea ce ilustrează perfect faptul că nu

¹⁴⁵ *Ibidem*, p. 71.

logica matematicii intuiționiste este aici tratată cu mijloace metalogice modale formaliste, ci dimpotrivă, *logica intuiționistă se dovedește un instrument de investigație metalogică* a sistemelor modale formaliste.

2°. Alte interpretări ale logicii intuiționiste

Gödel a obținut și alte rezultate privind raportul dintre logica obișnuită și cea intuiționistă, cit și dintre cele două tipuri de matematici ¹⁴⁶. Din punct de vedere logic, prezintă interes încercarea de a transcrie operațiile clasice în operații intuiționiste nu direct, prin intermediul operatorilor analogi, respectiv „ $\rightarrow$ ” prin „ $\supset$ ”, „ $\vee$ ” prin „ $\vee$ ”, „ $\&$ ” prin „ $\wedge$ ” și „ $\sim$ ” prin „ $\neg$ ”, ci prin intermediul altor operații clasice echivalente, în afară de negație și conjuncție, care sînt transcrise direct. Se obțin astfel următoarele formule :

$\sim p$	$\neg p$
$p \rightarrow q$	$\neg (p \wedge \neg q)$
$p \vee q$	$\neg (\neg p \wedge \neg q)$
$p \& q$	$p \wedge q$

Se observă aici faptul că pe coloana intuiționistă (dreapta) nu apare decît *conjuncția* și *negația*, în timp ce pe coloana formalistă apar *toți* operatorii, mai precis *toți* operatorii uzuali, căci formalistic sînt posibili 16 operatori. De aici urmează că *orice* formulă clasică poate fi transcrisă intuiționistic. Dacă formula este adevărată în logica formalistă, atunci și transcrierea ei este valabilă intuiționistic. Așa apare, de exemplu, *negatio duplex*

$$(\sim \sim p) \rightarrow p,$$

care în forma

$$\neg (\neg \neg p \wedge \neg p)$$

¹⁴⁶ Cf. K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4.

este valabilă și în logica intuiționistă, sau *tertium non datur*.

$$p \vee \sim p,$$

care transcris prin

$$\neg (\neg p \wedge \neg \neg p)$$

este valabil și intuiționistic.

Dar, în felul acesta se poate considera că logica intuiționistă conține logica formalistă, deoarece orice formulă clasică poate fi redată intuiționistic, în schimb logica intuiționistă conține și alte formule în afara celor transcrise din logica formalistă, respectiv formulele care conțin operatorii „ $\supset$ ” și „ $\vee$ ”.

Rezultatul obținut de Gödel nu are însă decît o valoare pur formalistă. Într-adevăr, intuiționistic nu este admisibilă transcrierea operațiilor logice una prin cealaltă. Aceasta înseamnă că între $p \vee \sim p$ și $\neg (\neg p \wedge \neg \neg p)$ nu există nici o legătură. Din acest punct de vedere, nici formalistic nu se obține decît o simplă combinație de formule. Se știe că prin negație și operatorul numit „incompatibilitate” pot fi transcrise toate operațiile formaliste. Rezultatul lui Gödel reprezintă o astfel de transcriere în care apar însă numai patru operatori.

Deoarece variabilele sînt aceleași, aici este vorba, în realitate, de *aceiași* operatori; dovada o constituie și faptul că negația (cel mai discutat operator) și conjuncția sînt identice, doar semnele lor diferă. Făcînd abstracție de notație se obțin următoarele coloane :

$\sim p$	$\sim p$
$p \rightarrow q$	$\sim (p \& \sim q)$
$p \vee q$	$\sim (\sim p \& \sim q)$
$p \& q$	$p \& q$

Este ușor de observat că transcrierea aceasta nu are sens din punct de vedere intuiționist, căci de exemplu, echivalența

$$(p \rightarrow q) = \sim (p \& \sim q)$$

nu este valabilă intuiționistic. Cu toate acestea, articolul lui Gödel a oferit formalistilor o nouă problemă, respectiv aceea de a hotărî care dintre cele două logici (intuiționistă sau formalistă) o conține pe cealaltă. Posibilitatea apariției unei astfel de probleme este garantată de interpretarea pur formalistă a logicii intuiționiste.

Cum era și firesc, au apărut soluții contradictorii, uneori la același autor. Lukasiewicz, de exemplu, abordînd problema din perspectiva *restricțiilor* axiomatice, consideră calculul intuiționist al propozițiilor drept o parte a calculului clasic, dar abordînd problema din perspectiva transcrierii a la Gödel, ajunge la concluzia contrară¹⁴⁷. Se pare că primul punct de vedere, abandonat de către Lukasiewicz, este susținut încă de reprezentanți ai Școlii poloneze, cum ar fi A. Mostowski, care, considerînd că toate formulele acceptate intuiționistic sînt acceptate și formalistic (clasic), conchide că „logica intuiționistă este o parte a logicii clasice”¹⁴⁸. Aceeași poziție este adoptată de către J. Porte¹⁴⁹. El consideră că Σ_c este sistemul clasic al lui A. Church. Un fragment din Σ_c este un sistem formal al cărui alfabet și formule sînt aceleași cu alfabetul și formulele din Σ_c , și ale cărui teze sînt o parte din tezele lui Σ_c . Este clar, conchide Porte, că sistemul Σ_{Hy} este un fragment din Σ_c . Van Dantzig, pe de altă parte, consideră că „operațiile logice elementare formează o parte a logicii intuiționiste”¹⁵⁰. El se bazează pe transcrierea operațiilor à la Gödel și ajunge la concluzia că ar exista o interpretare „slăbită” (*weaker*) și una „tare” (*strong*) a operațiilor logice. Deci $p \vee q$ și $\neg(p \wedge \neg q)$ ar reprezenta aceeași operație, una fiind accepția tare, cealaltă accepția slăbită a disjuncției, ceea ce nu are nici un sens din punct de vedere intuiționist.

Lukasiewicz, pornind de la teza lui Gödel, sugerează faptul că un sistem pur formalist, ca cel al lui Sobocinski (1939), care să conțină doar conjuncția și negația, ar fi un sistem intuiționist¹⁵¹. Într-adevăr, dacă variabilele sînt identice și operatorii de asemenea

¹⁴⁷ Cf. J. Lukasiewicz, *On the intuitionistic theory of deduction*, *Indagationes Mathematicae*, XIV, 1952, p. 208.

¹⁴⁸ A. Mostowski, *Formalization of the intuitionistic logic*, *Acta Philosophica Fennica*, XVII, 1965, p. 11.

¹⁴⁹ J. Porte, *Une propriété du calcul propositionnel intuitionniste*, *Indagationes Mathematicae*, XX, 1958, p. 362.

¹⁵⁰ D. van Dantzig, *On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics*, I, *Indagationes Mathematicae*, IX, 1947, p. 924.

¹⁵¹ J. Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 201.

(ceea ce este imposibil din punct de vedere intuiționist) atunci un sistem formalist, care conține doar conjuncția și negația, este o parte a sistemului Σ_{Hy} .

Pentru a dovedi acest lucru, Lukasiewicz elaborează un sistem intuiționist echivalent cu Σ_{Hy} , care poate fi notat cu Σ_{Li} , și unul parțial-intuiționist Σ_{Lp} care să conțină numai conjuncția și negația. Lukasiewicz mai elaborează un sistem Σ_{Lc} care să conțină numai implicația și negația. Pe baza transcrierilor à la Gödel, el stabilește o definiție, care în notația noastră ia forma :

$$\neg(p \wedge \neg q) \Rightarrow_{df} (p \rightarrow q),$$

ceea ce înseamnă, după Lukasiewicz, posibilitatea de a înlocui orice expresii de forma $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ prin expresii de forma $p \rightarrow q$, deci de a introduce implicația clasică în calculul intuiționist. Σ_{Lc} este deci o parte a lui Σ_{Lp} , căci Σ_{Lp} conține și formule care nu pot fi transcrise prin implicația clasică. Pe de altă parte, Σ_{Lc} este identificat cu „teoria clasică a deducției”¹⁵². Lukasiewicz precizează prin urmare, cu mijloace axiomatice, rezultatul lui Gödel. Astfel : logica formalistă (clasică) respectiv Σ_{Lc} (redată prin negație și implicație) este o parte a unei părți Σ_{Lp} (negație și conjuncție) a logicii intuiționiste, respectiv a sistemului Σ_{Hy} .

Una din consecințele cu caracterul cel mai evident neintuiționist, care decurge din includerea logicii clasice în logica intuiționistă, o constituie faptul că, în cele din urmă, trebuie admis că, într-o formă sau alta „legea terțului exclus poate fi demonstrată în teoria intuiționistă a deducției”¹⁵³. Într-adevăr, legea terțului exclus este o formulă din sistemul Σ_{Lc} , în care disjuncția este transcrisă prin implicație conform relației $(\sim p \vee p) = (p \rightarrow p)$. Or, Σ_{Lc} este o parte din Σ_{Lp} , iar Σ_{Lp} o parte din Σ_{Hy} , ergo legea terțului exclus face parte din Σ_{Hy} . Se ajunge deci la următoarea contradicție : logica intuiționistă include și exclude în același timp legea terțului exclus. Contradicția dovedește că încercările de acest tip nu sînt valabile decît în momentul în care se renunță la însăși fundamentul logic al teoriei intuiționiste.

Pe baza definiției

$$(\sim p \rightarrow q) \Rightarrow_{df} (p \vee q),$$

¹⁵² *Ibidem*, p. 205.

¹⁵³ *Ibidem*, p. 207.

prin care se poate reda și terțul exclus, și pe baza definiției

$$\sim (p \rightarrow \sim q) \Rightarrow_{df} (p \wedge q),$$

Lukasiewicz consideră că sistemul Σ_{Lc} poate fi „îmbogățit” prin introducerea conjuncției și a disjuncției. În felul acesta se obține un sistem mai bogat (Σ_{Lc2}) decât Σ_{Lc} — bogat înseamnă aici „cu mai multe operații logice”. Dar sistemul Σ_{Lc2} este mai bogat și decât Σ_{Lp} , care îl conține pe Σ_{Lc} , și devine tot atît de bogat ca Σ_{Hy} . În felul acestea se ajunge la punctul de plecare, căci Σ_{Lc2} este Σ_C (sistemul clasic) cu legea terțului exclus și a dublei negații, iar Σ_{Hy} este sistemul intuiționist *fără* aceste legi, ceea ce înseamnă că dimpotrivă Σ_{Hy} este conținut în Σ_C , deoarece Σ_C conține și formule care nu apar în Σ_{Hy} . Cu alte cuvinte, din întreg este obținută partea, iar din parte întregul, de unde „partea conține întregul” și „întregul conține partea”, devin identice.

Tot acest eșafodaj formalist cade de la sine dacă este interzisă, în mod intuiționist, transcrierea operațiilor logice unele prin altele. Nu este admisibil ca $p \vee \sim p$ să nu facă parte din Σ_{Hy} , dar să facă parte dintr-o parte a acestuia, care se dovedește astfel mai bogată decât Σ_{Hy} . Este evident că există formule din Σ_C care nu pot fi incluse în Σ_{Hy} . K. J. Cohen arată că există și formule din Σ_{Hy} care nu pot fi incluse în Σ_C prin simplă transcriere de operator ¹⁵⁴. El se referă la concluzia lui Lukasiewicz, după care, în cele din urmă, s-ar putea stabili relații între operatorii intuiționiști și cei clasici astfel încît ar avea loc relațiile

$$(p \supset q) \Rightarrow_{df} (p \rightarrow q)$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow_{df} (p \& q)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow_{df} (p \vee q),$$

dar ar fi imposibile conversele lor. Textul lui Lukasiewicz nu este destul de explicit. Ultimele relații conțin semnul „ $\Rightarrow_{df}$ ” introdus de către Lukasiewicz fie prin „F δ ” fie simplu prin „F” care este apoi identificat cu „ $\supset$ ”, ceea ce ar duce la formule ca

$$(p \supset q) \supset (p \rightarrow q).$$

¹⁵⁴ K. J. Cohen, *A remark on Lukasiewicz's „On the intuitionistic theory of deduction”*, *Indagationes Mathematicae*, XV, 1953, p. 112.

Semnul „ $\Rightarrow_{df}$ ” are o justificare metalogică; identificat cu implicația intuiționistă dă naștere deci la *formule combinate* cu operatori intuiționiști și formalști. Aceste formule combinate sînt considerate teze intuiționiste. Cohen demonstrează că una din aceste teze, respectiv

$$(22) \quad (q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)),$$

dacă este transcrisă parțial prin „ $\rightarrow$ ” duce la

$$(23) \quad (q \rightarrow r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)),$$

care se dovedește o prescurtare a formulei

$$(24) \quad \neg(q \wedge \neg r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)),$$

în virtutea definiției

$$\neg(p \wedge \neg q) \Rightarrow_{df} (p \rightarrow q).$$

Se dovedește, pe baza unor matrici, că teza (22) obține aceleași valori ca și axiomele intuiționiste, în timp ce (24) nu obține aceste valori și deci nu este acceptabilă intuiționistic.

Valoarea acestei demonstrații depinde însă de convenții greu de acceptat atît din punct de vedere intuiționist, cît și formalist. Ea dovedește însă faptul că jocul transcrierilor, perfect valabil în logica formalistă, duce la complicații dacă este aplicat fără discernămint și la logica intuiționistă.

b) *Sisteme intuiționiste diferite de Σ_{Hy}*

Sistemul lui Heyting rămîne sistemul „cel mai potrivit” pentru logica intuiționistă. Numeroasele completări și interpretările ulterioare pe care Școala intuiționistă și Heyting însuși le-au adăugat sistemului, de-a lungul a peste 40 de ani au dovedit faptul evident, de la care a pornit dealtfel autorul sistemului Σ_{Hy} în 1930, că nici un sistem formal nu poate să reprezinte în mod adecvat matematica intuiționistă. Aceasta nu a însemnat că, în acest timp, în afară de perfecționările referitoare la Σ_{Hy} , nu au fost posibile și alte încercări de a obține

un așa-zis sistem „adekvat”. Unele dintre aceste sisteme au fost construite cu scopul de a perfecționa aparatul axiomatic, altele presupun o reinterpretare a formelor elementare.

Au fost amintite deja încercările, unele chiar anterioare sistemului Σ_{HY} , de a interpreta logica intuiționistă în calcule polivalente. Aceste încercări nu au dus la rezultate sistematice, iar faptul că au fost treptat abandonate dovedește că nu merită să fie perfecționate. Ele, de altfel, nu pot aduce nimic în plus față de calculele polivalente formaliste.

1° Sistemul lui Johansson

Ingebrigt Johansson, pornind de la două dintre axiomele sistemului Σ_{HY} , și anume

$$(A_{2.14}) \quad \vdash \vdash b \supset (a \supset b)$$

$$(A_{4.1}) \quad \vdash \vdash a \supset (a \supset b),$$

consideră că scopul lor este acela de a preciza semnificația implicației¹⁵⁵.

Johansson consideră că implicația $(a \supset b)$ ar putea să aibă trei accepții: (1) când b este recunoscut ca urmare sau consecință a lui a ; (2) când b este considerat corect și (3) când a este considerat fals sau absurd. Cazul (3) este redat în $(A_{4.1})$.

Glivenko demonstrase deja că ambele axiome sînt deductibile din formula

$$(38) \quad (\neg a \vee b) \supset (a \supset b),$$

care este respinsă de către C. I. Lewis în „calculul implicației stricte”. Lewis admite însă conversa lui (38) și anume

$$(39) \quad (a \supset b) \supset (\neg a \vee b).$$

În logica obișnuită (formalistă) sînt valabile și (38) și (39); în Σ_{HY} este valabilă (38), dar nu este valabilă (39); în logica lui Lewis este

¹⁵⁵ I. Johansson, *Der Minimalalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, *Compositio Mathematica*, 4, 1936, p. [1].

valabilă (39), dar nu este valabilă (38), iar în ceea ce Johansson numește „calculul minimal” nu este valabilă nici (38) nici (39).

Cu toate acestea sistemul lui Johansson (Σ_J) este mai apropiat de Σ_{Hy} decît de celelalte, căci respingînd pe (38) din care urmează atît ($A_{2.14}$) cît și ($A_{4.1}$), el menține totuși axioma ($A_{2.14}$) cît și celelalte axiome ale lui Σ_{Hy} , afară de ($A_{4.1}$).

Negația ($\neg a$) este considerată identică cu ($a \supset F$), conform definiției

$$a =_{Df} a \supset F,$$

în care F înseamnă „contradicție” sau „ceva fals”.

În privința teoremelor demonstrate, în Σ_J , spre deosebire de Σ_{Hy} , nu mai sînt valabile următoarele formule:

$$(4.4) \quad a \wedge \neg a \supset b,$$

$$(4.41) \quad (a \wedge \neg a) \vee b \supset b,$$

$$(4.42) \quad (a \vee b) \wedge \neg a \supset b,$$

$$(4.45) \quad b \vee \neg b \supset (\neg \neg b \supset b),$$

$$(4.46) \quad \neg a \vee b \supset (a \supset b),$$

$$(4.47) \quad a \vee b \supset (\neg a \supset b),$$

$$(4.71) \quad (a \supset b \vee \neg c) \supset (a \wedge c \supset b),$$

$$(4.81) \quad \neg \neg (\neg \neg a \supset a).$$

Toate aceste formule sînt obținute direct sau indirect din ($A_{4.1}$). În rest, Σ_J diferă de Σ_{Hy} prin numărul formelor și metoda deducției.

Pentru a demonstra că formele enumerate nu sînt valabile în Σ_J , Johansson utilizează metoda matricială a lui Bernays, pe care o aplicase și Heyting. În cazul lui Σ_J , aplicarea acestei metode face ca formulele $a \vee \neg a$ și $\neg \neg a \supset a$ să nu mai fie echivalente. Cu alte cuvinte, dacă la axiomele lui Σ_{Hy} se adaugă una dintre aceste formule, atunci poate fi dedusă și cealaltă. Pentru Σ_J este valabilă regula după care dacă se adaugă drept axiomă $\neg \neg a \supset a$, atunci

pot fi deduse $a \vee \neg a$ și $a \vee \neg a \supset b$, dar numai din $a \vee \neg a$, fără să fie utilizată și $(a \wedge \neg a) \supset b$ nu poate fi dedusă $\neg \neg a \supset a$ ¹⁵⁶.

În ce privește raportul lui Σ_J cu logica lui Lewis, Johansson menționează faptul că dacă la Σ_J se adaugă *tertium non datur* ca axioma, atunci nu mai poate fi demonstrat (4.46), ci conversa ei, respectiv formula (39) pe care o admite Lewis.

O altă particularitate importantă a lui Σ_J o constituie faptul că aici nu mai sînt valabile principiile lui Glivenko¹⁵⁷. De exemplu, nu mai este valabilă teza că „dacă o anumită expresie din logica propozițiilor este demonstrabilă în sistemul clasic (Σ_C), atunci falsitatea falsității acestei expresii este demonstrată în Σ_J ”. Aceasta, deoarece $\sim \sim p \rightarrow p$ este demonstrabilă în Σ_C , în timp ce $\neg \neg (\neg \neg a \supset a)$, respectiv (4.81) nu mai este demonstrabilă în Σ_J .

Trebuie subliniat faptul că Johansson nu se referă la interpretarea variabilelor $a, b, c, \dots$. Ca o consecință directă a acestui fapt, formulele predicative din Σ_J sînt identice cu cele formaliste. Restricțiunile predicative decurg, la Johansson, numai din cele propoziționale, axiomatic. Doar aplicarea formulelor predicative la domeniul geometriei presupune determinarea proprietăților. Însă interpretarea pe care le-o dă Johansson este greu de admis. $P(x)$, de exemplu, înseamnă la el „ x este un punct”, $G(x)$ înseamnă „ x este o dreaptă ș.a.m.d.¹⁵⁸. Aici formele predicative trebuie să fie interpretate enunțiativ, căci altfel „punct”, „dreaptă” etc. nu pot fi admise în calitate de proprietăți.

Sistemul Σ_J este admisibil din punct de vedere intuiționist numai ca *variantă* a lui Σ_{HY} , însă fără calculul predicativ. Independent de Σ_{HY} sistemul Σ_J este un simplu sistem formalist arbitrar. Într-adevăr, respingerea axiomei (A_4) nu este o cerință impusă de necesitățile matematicii intuiționiste. Sistemul Σ_J nu poate fi numit deci un „sistem logic al matematicii intuiționiste”.

2° Logici fără negație

Admiterea logicilor fără negație a întâmpinat multă rezistență, mai ales la început, cînd inițiatorul cercetărilor în această direcție, G. F. C. Griss, a căutat să le dea o justificare pur intuiționistă. B. van Rootselaar amintește, în glumă, greutățile pe care le-a avut de întîm-

¹⁵⁶ *Ibidem*, p. [10].

¹⁵⁷ *Ibidem*, p. [11].

¹⁵⁸ *Ibidem*, p. [13].

pinat căpitanul Guliver în țara Houyhnhnmilor, un fel de cai foarte inteligenți, a căror limbă, în treacăt fie spus, aducea foarte mult, zice Swift, cu olandeza! Guliver nu a reușit să le explice Houyhnhnmilor ce este *minciuna*, deoarece aceștia foloseau cuvintele numai pentru a exprima *ceea ce este*. Dacă *ceea ce este* este redus la construcțiile matematice mentale, iar limbajul la limbajul matematic se ajunge la o concepție pe care Rootselaar o numește „strict intuiționistă”,¹⁵⁹ în care, într-adevăr nu are sens să se vorbească despre *ceea ce nu este*.

În cadrul teoriei intuitive a fost stabilit deja faptul că o logică intuiționistă *fără negație* este o logică în care sînt admise numai *expresiile asertate*, în timp ce o logică intuiționistă cu negație este aceea în care sînt admise și *expresiile atestate*. Sistemul formal al lui Griss nu este un sistem corespunzător întregii teorii logice intuitive a matematicii intuiționiste. El corespunde doar teoriei intuitive în care nu apare negația. Această teorie a fost considerată limitată, dar totuși valabilă în contextul logicii respective. Din această cauză, calitățile intuiționiste ale sistemului prezentat de Griss trebuie apreciate, în primul rînd, în funcție de propria lui teorie intuitivă fără negație.

Logica fără negație a lui Griss

Consecvent punctului său de vedere, după care intuiționismul este o consecință a filozofiei idealiste, Griss consideră că „din motive filozofice utilizarea negației poate fi respinsă în matematica intuiționistă”¹⁶⁰. El nu se limitează însă la această teză abstractă, și, în conformitate cu teza (VII), încearcă nu numai elaborarea unei teorii logice intuitive *înaintea* sistemului formal, ci chiar elaborarea unei *matematici intuiționiste fără negație*. Teoria sa intuitivă corespunde acestei matematici, în care absența negației elimină automat raționamentele și principiile contestate intuiționistic. Trebuie remarcat totuși faptul că Griss nu acordă o importanță deosebită teoriei intuitive și că adesea raportează sistemul formal direct la matematica intuiționistă fără negație. Însă sistemul formal nu este un sistem al matematicii intuiționiste, ci al teoriei logice intuitive a acestei matematici, căci pe aceasta o descrie și o sistematizează.

¹⁵⁹ B. van Rootselaar, *Intuition und Konstruktion*, p. 181.

¹⁶⁰ F. C. Griss, *Negationless intuitionistic mathematics*, I, Proceedings koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 49, 1946, p. 1127.

Eliminarea negației, cum s-a văzut în teoria intuitivă, complică însă interpretarea operațiilor logice. În legătură cu disjuncția, de exemplu, enunțul „propoziția a este valabilă sau propoziția b este valabilă” nu are nici un sens în matematica fără negație, căci ea nu conține decît propoziții valabile. Din această cauză disjuncția, în logica fără negație este identică cu conjuncția. Într-adevăr, dacă a și b sînt întotdeauna adevărate, atunci $(a \wedge b)$ și $(a \vee b)$ sînt întotdeauna adevărate. Disjuncția în acest caz, devine *a fortiori* o disjuncție în care nu se poate ca unul din membrii să fie fals, adică devine o conjuncție. Griss ajunge la concluzia că în calculul propozițional al logicii fără negație nu poate să apară decît *implicația* și *conjuncția* ¹⁶¹.

Griss ține să atragă atenția că simpla construcție a unei logici în care să apară numai implicația și conjuncția nu înseamnă construcția unei logici *a matematicii fără negație*. O astfel de logică nu poate fi construită fără studiul matematicii fără negație ¹⁶², ceea ce corespunde tezei (VII).

În ce privește valoarea variabilelor propoziționale obișnuite Griss remarcă faptul că, în Σ_C , ele pot fi adevărate sau false, în Σ_{Hy} „nu este sigur dacă p este adevărată sau falsă”, iar în matematica intuiționistă nu este posibil să apară propoziții false. Ultima remarcă permite în principiu identificarea logicii fără negație a lui Griss cu logica monovalentă a lui O. Onicescu.

Dar deși avertizează împotriva interpretărilor formaliste, Griss utilizează totuși ca semne pentru variabilele propoziționale $p, q, r, \dots$, care pot da naștere la înțelegeri greșite. În realitate ele desemnează numai propoziții matematice. În plus, Griss admite fără justificări matematice prealabile axiomele lui Heyting în care apare conjuncția și implicația, cu excepția lui $(A_{2.4})$, respectiv $\vdash \vdash b \supset (a \supset b)$, și $(A_{2.5})$, respectiv $\vdash \vdash (a \wedge (a \supset b)) \supset b$.

Sistemul lui Griss (Σ_{Gr}) conține axiomele: ¹⁶³

- | | |
|---------------|---|
| $(A_{2.1})$ | $p \rightarrow (p \& p)$ |
| $(A_{2.11})$ | $(p \& q) \rightarrow (q \& p),$ |
| $(A_{2.12})$ | $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \& r) \rightarrow (q \& r)),$ |
| $(A_{2.13})$ | $((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r),$ |
| $(A_{2.1})^*$ | $(p \& q) \rightarrow p.$ |

¹⁶¹ Ibidem, p. 947.

¹⁶² F. C. Griss, *Logic of negationless intuitionistic mathematics*, Indagationes Mathematicae, XIII, 1951, p. 41.

¹⁶³ Ibidem, p. 42.

Axioma ($A_{2.16}$)* înlocuiește pe ($A_{2.16}$), respectiv $\vdash \vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Griss nu insistă asupra semnificației intuiționiste a operațiilor logice. Aceasta este o lipsă care se datorește tratării superficiale a teoriei intuitive. Cu toate acestea, lipsa disjuncției și a negației face imposibilă identificarea implicației din Σ_{Gr} cu implicația materială.

Griss utilizează următoarele reguli de operație :

(1.11) Din demonstrarea lui P și a lui Q urmează $P \& Q$.

(1.12) Din demonstrarea lui P și a lui $P \rightarrow Q$ urmează Q .

(1.13) Din demonstrarea lui R și $P \rightarrow Q$ urmează $P \rightarrow Q \& R$, unde P , Q și R sînt variabile de formule.

Din punct de vedere pur formal trebuie remarcat aici faptul că „logica matematicii fără negație” nu este doar o „logică fără negație”. O simplă logică fără negație ar fi fost un sistem Σ_{fn} în care ar fi căzut cele două axiome din Σ_{Hy} care conțin negația. Sau, deoarece Σ_J exclude una din aceste axiome, ar fi fost un sistem Σ_J fără axioma care conține negația.

Alte sisteme fără negație

Acceptînd o teorie strict constructivă P. Destouches-Février ajunge la concluzia că „negația nu are ce căuta în matematici”. În mod firesc își pune apoi problema unei logici care să corespundă acestor matematici. Ea concepe mai întîi o *logică a construcțiilor* care duce la un „calcul izomorf cu calculul minimal al lui Johansson fără negație”¹⁶⁴. Este vorba de un sistem Σ_{fn} de tip pur formalist, care nu are nici o legătură cu matematica intuiționistă. De natură intuiționistă este însă așa-numita *logică a complementarității* fără negație¹⁶⁵, în care intervin noțiunile de „composabilitate” și „incomposabilitate”. Ele sînt legate de relațiile numite „incompatibile”, care apar în matematica fără negație a lui Griss, de exemplu, relația R , care înseamnă „=” (același), și $\bar{R}$, care înseamnă „#” (distinct). „Două propoziții $R(x, y, \dots)$ și $\bar{R}(x, y, \dots)$ cu aceleași argumente sînt numite incompatibile dacă R și $\bar{R}$ sînt incompatibile”; ele sînt composabile dacă relațiile sînt compatibile. Aici sînt căutate anumite relații, care, deși nu duc la expresii dintre care una să fie negația celeilalte, se comportă în mod analog. Introducerea unor

¹⁶⁴ P. Destouches-Février, *Le calcul de construction*, p. 1193.

¹⁶⁵ Cf. P. Destouches-Février, *Logique de l'intuitionisme sans négation et logique de l'intuitionisme positif*, Comptes rendus de l'Acad. sc., Paris, 226, 1948, p. 38.

astfel de relații pare necesară pentru a ilustra *legea non contradicției*, care nu presupune valori de adevăr ca legea terțului exclus și, prin urmare, nici negația valorică. Ea este introdusă deci prin intermediul relațiilor incompatibile, care determină expresii ce se exclud fără a se nega valoric.

Aceeași autoare încearcă și elaborarea unei *logici intuiționiste pozitive* care să corespundă așa-numitei „matematici intuiționiste pozitive”. Aceasta ar fi ceva „între intuiționismul lui Brouwer și intuiționismul fără negație a lui Griss”¹⁶⁶. În esență, este vorba de introducerea unei negații care să fie definită pozitiv. O propoziție, consideră autoarea, este negativă dacă implică o contradicție, deci

$$\neg p =_{df} p \rightarrow \emptyset,$$

unde $\emptyset =_{df} (1 = 2)$.

Trebuie remarcat aici faptul că excluderea arbitrară (formalistă) a negației prin Σ_{f_n} necesită reintroducerea ei sub *alte* forme. Numai în cazul unei concepții strict intuiționiste poate fi căutat temeiul excluderii propriu-zise a negației.

D. van Dantzig, care încearcă la rîndul său construcția unei „matematici afirmative”, consideră că „intuiționismul este independent de filozofiile speciale pe care le practică intuiționistii; adevărata lui semnificație poate fi demonstrată cu mijloace pur tehnice”¹⁶⁷. Ceea ce își propune D. van Dantzig este în fapt construcția unei teorii „intuiționiste” prin „procedee pur formale” respectiv *formaliste*. Este vorba de obișnuitele transcrieri de calcule, care sînt numite aici „interpretări formaliste ale matematicii intuiționiste” și respectiv „interpretări intuiționiste ale matematicii clasice sau formaliste”. Deși par a fi de acord în a respinge așa-numitele „predicate negative”, despre care vorbea Brouwer, concepțiile lui D. van Dantzig și ale lui Griss sînt opuse. Ultimul subliniază faptul că „matematica afirmativă (a lui Dantzig) nu reprezintă formalizarea matematicii intuiționiste fără negație, deoarece, relațiile logice $A \supset B$, $A \wedge B$ și $A \vee B$ satisfac în continuare regulile logice cunoscute, ceea ce nu

¹⁶⁶ P. Destouches-Février, *Esquisse d'une mathématique intuitioniste positive*, Comptes rendus de l'Acad. sc., Paris, 225, 1947, p. 1242.

¹⁶⁷ D. van Dantzig, *On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics*, p. 922.

este cazul în matematica fără negație”¹⁶⁸. Într-adevăr, utilizând simple transcrieri ca :

$$A \vee B =_{df} \neg \neg (A \wedge \neg B)$$

$$A \supset B =_{df} \neg (A \wedge \neg B)$$

în care nu se știe ce reprezintă A și B , și care nu sînt valabile din perspectivă intuiționistă, D. van Dantzig lucrează în realitate cu operații formaliste notate cu simboluri intuiționiste. Griss consideră că sistemul lui D. van Dantzig (Σ_D) este un „sistem formalist”. Din punct de vedere pur matematic, Griss îi reproșează „introducerea speciei vide ca subspecie a tuturor speciilor”¹⁶⁹, ceea ce înseamnă, din punct de vedere intuiționist, inversarea raportului dintre *existență* și *definiție*. Într-adevăr, poate fi definită (în manieră formalistă) o „subspecie a tuturor speciilor”, dar aceasta nu înseamnă (în manieră intuiționistă) că aceasta există realmente.

Heyting obiectează de asemenea lui van Dantzig modalitatea existențială a utilizării cuantificatorilor¹⁷⁰. „Inducția completă, susține Heyting, justifică utilizarea fără restricții a cuantificatorilor universali în domeniul numerelor naturale”. De acord cu Griss, Heyting consideră că „Sistemul lui van Dantzig, deși interesează din alte puncte de vedere, nu reprezintă o formalizare a matematicii intuiționiste”. Deși sistemul Σ_D este corect din punct de vedere formal, el nu poate să ducă la obținerea unor rezultate *pozitive*, singurele care interesează din punct de vedere intuiționist.

Încercările menționate (Destouches-Février și D. van Dantzig) sînt de bună seamă formaliste, cu toate acestea ele au, cel puțin în principiu, legătură cu matematica intuiționistă, spre deosebire de altele, cum ar fi cele încercate de Vredenduin, Teensma, Lorenzen, Valpola și alții. O încercare asemănătoare este cea a lui Glimore¹⁷¹. El încearcă, ca și D. Février introducerea unei „negații improprii”. Este vorba și aici de o „definiție pozitivă” a „negației”, introdusă prin relațiile „=” și „#”. Pentru cazul special al numerelor reale apare următoarea situație : dacă $a, b, c, \dots$ sînt numere reale și dacă

¹⁶⁸ Griss, *La mathématique intuitioniste sans negation*, p. 138.

¹⁶⁹ *Ibidem*, p. 139.

¹⁷⁰ A. Heyting, *Intuitionism in mathematics* (1958), p. 111.

¹⁷¹ P. C. Glimore, *The effect of Griss' criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic*, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 56, 1953.

este cunoscut un număr rațional pozitiv r , astfel încît $|a - b| > r$, atunci are loc $a \# b$. O negație improprie $N(a \# b)$ are loc dacă și numai dacă, pentru orice număr real x , $x \# a$ implică $x \# b$. Este evident că, în aceste condiții, din $N(a \# b)$ se poate conchide $a = b$, ceea ce reprezintă ceva analog cu *negatio duplex*. Deci și pe această cale se încearcă reintroducerea unui alt tip de negație, după ce a fost exclusă negația propriu-zisă.

c) *Semnificația intuiționistă a demonstrației lui Gödel*

Au fost menționate deja (§ e, cap. III) așa-numitele *constante propoziționale nedecidabile* ($\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \dots$) și faptul că acestea nu pot să apară în teoria intuitivă a logicii intuiționiste nici pe calea directă și nici pe calea indirectă de obținere a paralelismului matematico-lingvistic. Ele pot fi obținute numai prin mijloace străine acestui paralelism. Menținerea lor, în cadrul unor sisteme de tip Σ_{G_0} determină admiterea polivalenței, lipsită de sens în context intuiționist. Numai Heyting, după cum s-a amintit, a alunecat pe panta admiterii lor, în discuțiile cu Barzin și Errera, fiind nevoit ulterior să introducă un tip special de negație (negația slabă = nu este adevărat că...) pentru respingerea lor. Aceasta în contextul teoriei intuitive. În Σ_{Hy} apare numai negația tare (este fals că...), constantele propoziționale nedecidabile fiind excluse prin restricție formalistă. Este vorba de variabilele $a, b, c, \dots$ și de negațiile lor $\neg a, \neg b, \neg c, \dots$ care nu pot fi înlocuite decît cu constante adevărate (primele) și false (ultimele). Nu sînt introduse variabile pentru constante propoziționale nedecidabile.

De aici urmează că problema nedecidabilității constantelor propoziționale nu afectează sistemul Σ_{Hy} , cum nu afectează dealfel nici sistemele formaliste obișnuite.

Ceea ce trebuie specificat în cazul constantelor propoziționale în discuție este *caracterul material* al nedecidabilității lor, respectiv caracterul *neformal*. Fiind dată (evident prin alte mijloace decît cele intuiționiste, de obținere a paralelismului matematico-lingvistic) o constantă α , care prescurtează o expresie matematică propozițională, se constată că aceasta are, de regulă, aspectul obișnuit, categoric al oricărei teoreme matematice. Multe dintre acestea pot fi ușor demonstrate

cu mijloace formaliste (demonstrație indirectă). Ea se dovedește nedecidabilă (material) numai în contextul teoriei intuitive a logicii intuiționiste, căci numai aici lui α nu-i corespunde o construcție matematică efectivă A , pentru a putea deveni $\neg \alpha$ și nici o construcție efectivă B , a cărei expresie lingvistică prescurtată prin β să contradică α , pentru a deveni $\neg \alpha$. De aici rezultă $\alpha^0 = \text{constantă propozițională nedecidabilă material, respectiv nedecidabilă prin construcție matematică efectivă.}$

Dar imposibilitatea obținerii constantelor propoziționale nedecidabile în teoria intuitivă a logicii intuiționiste și excluderea lor prin mijloace formaliste din cadrul sistemelor formale de tip Σ_{Hy} nu înseamnă excluderea *generală* a nedecidabilității. Există și expresii *formal nedecidabile*. Este vorba de anumite formule alcătuite din *variabile*.

În cadrul teoriei intuitive a logicii intuiționiste *este imposibilă* apariția expresiilor formal nedecidabile. Cauza o constituie faptul că obținerea oricărei expresii se face pornind de la expresii admise și operînd numai cu reguli și raționamente universal valabile. Se pare că Paul Finsler a fost primul (1926) care a introdus noțiunea „propoziție formal nedecidabilă”. O propoziție, consideră el, este *formal nedecidabilă* „dacă nu este posibilă nici o demonstrație formală pentru această propoziție sau pentru contradictoria ei”¹⁷².

Nedecidabilitatea formală înseamnă deci o reeditare pe plan formal a „nedecidabilității materiale”. Cu alte cuvinte, o expresie este nedecidabilă *vi materiae* dacă nu poate fi nici atestată nici negată; este nedecidabilă *vi formae* dacă nu poate fi demonstrată formal nici ea nici contradictoria ei. În primul caz este vorba de expresii propoziționale constante, în al doilea de formule care conțin expresii variabile.

Din acest punct de vedere, demonstrația lui Gödel semnifică *extinderea* enunțului existențial al lui Finsler: „există expresii formal nedecidabile” la un enunț de genul „în orice sistem formalist (Σ_{Form}) există expresii formal nedecidabile”¹⁷³. Într-adevăr caracteristicile

¹⁷² P. Finsler, *Formal proof and undecidability*, in „From Frege to Gödel”, Harvard University Press, 1967, p. 443.

¹⁷³ Prin Σ_{Form} înțelegem „toate sistemele care provin din sistemul lui Russell-Whitehead și Zermelo-Frankel prin adăugarea unui număr finit de axiome, presupunînd că prin axiomele adăugate nu se pot demonstra propoziții false”. Cf. K. Gödel, *On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems*, in „From Frege to Gödel”, p. 597.

enunțate de Gödel corespund *oricărui* sistem Σ_{Form} . Este vorba de sisteme ale căror formule alcătuiesc „șiruri finite de semne fundamentale (variabile, constante logice și paranteze, respectiv puncte de despărțire)”, de sisteme în care „se poate preciza exact care șiruri de semne fundamentale sînt formule cu sens și care nu” ș.a.m.d.

„O expresie nedecidabilă în Σ_{Form} , este o formulă P^o [în notația noastră] pentru care nu se poate demonstra nici P nici $\sim P$ ”.

Problema care interesează în acest moment este aceea de a ști dacă în sistemele formale intuiționiste (Σ_{Int}) este valabilă sau nu demonstrația lui Gödel. Pentru aceasta nu sînt necesare detaliile demonstrației, ci numai definiția expresiei nedecidabile.

Este ușor de văzut că demonstrația fiind valabilă în Σ_{Form} este valabilă implicit și în Σ_{Hy} și Σ_J , care sînt în fond sisteme formaliste obișnuite. Ea *nu mai este însă valabilă* în Σ_{Gr} și în nici un alt sistem intuiționist fără negație.

Într-adevăr, în Σ_{Gr} nu poate să apară nici o formulă P^o , deoarece în Σ_{Gr} nu se pune problema demonstrației lui $\sim P$. În orice logică fără negație formulele P^o nu semnifică altceva decît faptul că nu poate fi demonstrat P . Or, în această situație se găsesc toate formulele care nu pot fi demonstrate în Σ_{Gr} , fără a crea probleme speciale. Mecanismul demonstrației lui Gödel presupune însă admiterea negației.

Punctul de vedere consecvent intuiționist duce prin urmare atît la evitarea expresiilor nedecidabile *vi materiae* cit și la evitarea expresiilor nedecidabile *vi formae*. Inconsecvența formalistă a sistemelor de tip Σ_{Hy} nu înseamnă altceva decît readmiterea, sub altă formă, a legii terțului exclus. În aceste sisteme se consideră, într-adevăr, înainte de demonstrația lui Gödel, că pentru orice formulă bine construită P sau se poate demonstra P sau se poate demonstra $\sim P$.

Demonstrația lui Gödel are aceeași semnificație intuiționistă, pentru sistemele matematice „formale”, ca și demonstrația lui Brouwer pentru sistemele matematice „materiale”. În sistemele matematice „materiale” există expresii nedecidabile *vi materiae* care infirmă valabilitatea generală a legii terțului exclus, după care orice expresie matematică constantă bine construită este sau adevărată sau falsă. În sistemele matematice „formale” există expresii nedecidabile *vi formae* care infirmă valabilitatea generală a legii terțului exclus, după care pentru orice expresie P se poate demonstra sau P sau $\sim P$.

Este vorba aici de două nivele logice la care poate acționa sau nu legea terțului exclus : unul este nivelul *formal*, în care apare sau nu

$$(T) \quad p \vee \sim p$$

și altul este nivelul *metaformal* în care apare sau nu

$$(T') \quad \Delta P \vee \Delta \sim P$$

în care „ Δ ” înseamnă „demonstrabil”, iar P înseamnă variabilă de formule.

Sistemul Σ_{Hy} este un sistem în care nu apare $p \vee \sim p$, dar apare $\Delta P \vee \Delta \sim P$. Din această cauză Σ_{Hy} nu este un sistem Σ_{Int} propriu-zis. S-ar putea spune că Σ_{Hy} , Σ_J și toate celelalte de acest tip sînt sisteme „semiintuiționiste”, respectiv $\Sigma_{F/I}$. Numai sistemul lui Griss (Σ_{Gr}) este un sistem Σ_{Int} propriu-zis, în care nu apare nici $p \vee \sim p$ nici $\Delta P \vee \Delta \sim P$.

Gödel însuși remarcă analogia dintre raționamentul său și obișnuitele paradoxe logice¹⁷⁴. (Situția paradoxală rezidă în faptul că, dacă se demonstrează P atunci se dovedește $\sim P$, iar dacă se demonstrează $\sim P$, atunci se dovedește P . Altfel spus, P se demonstrează în același timp cu negația lui, ceea ce este imposibil). Dar, în cazul paradoxelor obișnuite, *formale* se presupune valabilitatea generală a legii terțului exclus în forma (T), pe cînd în raționamentul lui Gödel se presupune valabilitatea generală a legii terțului exclus în forma (T'). Din această cauză, „paradoxul lui Gödel” poate fi numit *paradox metaformal*. Σ_{Gr} este singurul Σ_{Int} în care este imposibil să apară paradoxe formale sau metaformale.

Teoria intuitivă a logicii intuiționiste, bazată pe primele patru teze intuiționiste, duce implicit la respectarea tezei (V). Imposibilitatea obținerii constantelor propoziționale nedecidabile și a expresiilor formal nedecidabile face imposibilă apariția paradoxelor. Faptul că acestea apar, într-o formă sau alta, într-un sistem formal implică faptul că acest sistem *nu este corespunzător* teoriei intuitive a logicii intuiționiste. Dacă nu se admite acest lucru, atunci apare o altă contradicție și anume aceea dintre teoria intuitivă, conformă cu teza (V) și sistemul formal care încalcă teza (V).

¹⁷⁴ *Ibidem*, p. 598.

Se ajunge astfel la o situație curioasă. Σ_{Hy} care corespunde în mai mare măsură decât Σ_{Gr} ansamblului teoriei intuitive a logicii intuiționiste, prin faptul că admite negația și toate formulele valabile care o conțin, nu corespunde *în esență*, prin încălcarea tezei (V), acestei teorii, în timp ce Σ_{Gr} , care corespunde numai acelei părți din teoria intuitivă a logicii intuiționiste care nu conține negația, corespunde *în esență* întregii teorii.

Faptul că paradoxul metaformal semnalat de Gödel nu poate fi exclus din sistemele formale decât prin excluderea *oricărei* forme de negație înseamnă că teoria intuitivă a logicii intuiționiste *nu poate fi descrisă sau sistematizată corect* (fără încălcarea vreunei teze) *decît în cadrul unui sistem fără negație de tip Σ_{Gr} .*

Această concluzie slăbește și mai mult izomorfismul dintre teoria intuitivă a logicii intuiționiste și sistemul formal corect în care poate fi descrisă. Sistemul respectiv este mult mai sărac decât teoria intuitivă.

V. LOGICA FORMALISMULUI NEOINTUIȚIONIST

Sistemele formale, despre care a fost vorba pînă în acest moment, sînt numite de regulă „intuiționiste” și au, în mai mare sau mai mică măsură, o legătură directă cu intuiționismul. S-a văzut însă că, în afară de Σ_{Gr} , ele sînt simple sisteme *formaliste*. Faptul că sînt numite „intuiționiste” nu este însă lipsit de temei, căci legătura lor cu intuiționismul este nu numai directă, ci și evidentă. Unele pornesc chiar de la matematica intuiționistă, altele de la anumite teze intuiționiste și, în fine, cele mai reprezentative, ca Σ_{Hy} , sînt legate implicit de teoria intuitivă a logicii intuiționiste.

Spre deosebire de toate acestea, există însă sisteme care nu mai au legătură directă cu intuiționismul și nici nu urmăresc o asemenea legătură, chiar și în cazurile cînd sînt numite tot „intuiționiste” sau sînt considerate că reprezintă forma *nouă* a intuiționismului. Aceste sisteme vor fi numite în continuare sisteme *formalist-neointuiționiste* și vor fi notate cu Σ_{FN} .

a) *Sisteme axiomatice formalist-neointuiționiste*

Formalismul neointuiționist poate fi caracterizat, în context logic, prin două tendințe : una este tendința formalistă a logicienilor intuiționiști și alta este tendința „intuiționistă” a logicienilor formalști.

Prima tendință a fost ilustrată deja. Însuși sistemul Σ_{Hy} a suferit metamorfoze formaliste. În varianta din 1966 Heyting utilizează pentru variabilele propoziționale intuiționiste semnele formaliste $p, q, r, \dots$. În genere, tendința rezidă în pierderea specificului intuiționist al variabilelor și al operațiilor logice. În felul acesta, ceea ce rămîne este un sistem pur formalist, care, dacă pornește de la Σ_{Hy} ,

are o axiomă în minus, și anume pe aceea care se referă la legea terțului exclus, iar dacă pornește de la Σ_{Gr} , are numai axiome care nu conțin negația.

Punctul de plecare al sistemelor Σ_{FN} nu îl mai constituie deci nici matematica intuiționistă, nici teze ale acesteia și nici teoria intuitivă a logicii intuiționiste, ci sistemele formale ale logicii intuiționiste. De la aceste sisteme se încearcă apoi *trecerea* la sisteme formaliste propriu-zise, prin adăugarea a ceea ce se consideră că le *lipsește* celor intuiționiste.

A doua tendință este caracterizată de faptul că se pornește de la sisteme formaliste, în care evident variabilele și operațiile nu au semnificație intuiționistă, și se introduc restricții formale, cum ar fi eliminările de axiome. Pe această cale se obțin sisteme „intuiționiste”, respectiv sisteme în care nu mai este valabil *tertium non datur* sau alte formule echivalente.

Sistemul Σ_T , al lui Troelstra, reprezintă o modalitate de *trecere* de la un sistem Σ_{Int} la unul Σ_{Form} . Sistemul, în care literele A , B , și C semnifică variabile de formule; semnul $\Rightarrow$ marchează implicația dintre grupuri de variabile de formule (pentru a evita parantezele); cuvântul „și” ține locul conjuncției dintre aceleași grupuri, iar semnul $\wedge$ înseamnă „falsitate”, conține următoarele axiome și reguli :

- (T₁) $A \rightarrow A$,
- (T₂) $A \text{ și } A \rightarrow B \Rightarrow B$,
- (T₃) $A \rightarrow B \text{ și } B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$,
- (T₄) $A \text{ \& } B \rightarrow A ; B \text{ \& } A \rightarrow A$,
- (T₅) $A \rightarrow A \vee B ; B \rightarrow A \vee B$,
- (T₆) $A \rightarrow C \text{ și } B \rightarrow C \Rightarrow A \vee B \rightarrow C$,
- (T₇) $C \rightarrow A \text{ și } C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow A \text{ \& } B$,
- (T₈) $A \text{ \& } B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$,
- (T₉) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow A \text{ \& } B \rightarrow C$,
- (T₁₀) $\wedge \rightarrow A$.

La acestea se adaugă definiția

- (D₁) $\sim A =_{df} A \rightarrow \wedge$

În sistemele care conțin aritmetica, $\wedge$ este identic cu $0 = 1$.

Specificul acestui sistem îl constituie faptul că „prin adăugarea legii terțului exclus se obține sistemul clasic Σ_C ”¹⁷⁵.

Sistemul lui Kleene Σ_{Kl} reprezintă maniera inversă, trecerea de la un sistem formalist la unul „intuiționist”. Σ_{Kl} , pentru calculul propozițional¹⁷⁶ conține următoarele postulate:

- (1a) $p \rightarrow (q \rightarrow p),$
- (1b) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)),$
- (2) $\frac{p, p \rightarrow q}{q},$
- (3) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \& q)),$
- (4a) $(p \& q) \rightarrow p,$
- (4b) $(p \& q) \rightarrow q,$
- (5a) $p \rightarrow (p \vee q),$
- (5b) $q \rightarrow (p \vee q),$
- (6) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)),$
- (7) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p),$
- (8) $\sim \sim p \rightarrow p.$

Acesta este evident un Σ_{Form} . Trecerea la un sistem Σ_{FN} se face prin înlocuirea lui (8) cu

$$(8') \quad \sim p \rightarrow (p \rightarrow q),$$

care corespunde axiomei $(A_{4.1})$ respinsă de Johansson, respectiv

$$(A_{4.1}) \quad \vdash \vdash \neg a \supset (a \supset b).$$

Deci se pornește de la un sistem Σ_{Form} și se ajunge la un sistem Σ_{FN} analog sistemului Σ_{Hy} .

Deosebirea dintre cele două tendințe este numai de manieră.

¹⁷⁵ G. Kreisel and A. S. Troelstra, *Formal systems for some branches of intuitionistic analysis*, Annals of Mathematical Logic, nr. 3, 1970, p. 232.

¹⁷⁶ Cf. S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam, 1967, p. 82.

Aceasta din urmă determinînd doar modalitatea diferită de *expunere* a sistemelor, respectiv faptul că se pornește de la unul și nu de la celălalt, faptul că se tinde către unul și nu către celălalt sau că unul este mai important sau mai general decît celălalt.

Tipic pentru prima tendință este și sistemul Σ_L al lui P. Lorenzen. El pornește însă de la un Σ_{fn} pe care îl numește „logică afirmativă”¹⁷⁷. Acestui sistem îi adaugă negația și obține „logica efectivă”, căreia îi adaugă apoi *tertium non datur* și obține „logica clasică”¹⁷⁸. Variabilele propoziționale și operatorii rămîn aceiași indiferent de sistemul în care se lucrează. Semnificația variabilelor propoziționale este cea obișnuită (stau pentru propoziții în genere), iar operațiile sînt redade prin matrice de adevăr.

Variabilele și operațiile logice sînt introduse în același mod și de către A. Schmidt¹⁷⁹. Sistemul său Σ_{sm} ilustrează însă ambele tendințe formalist-neointuiționiste, de trecere de la un criteriu la altul¹⁸⁰. El afirmă însă, în mod explicit, că Σ_{sm} este numit în mod arbitrar „intuiționist”, denumirea avînd o „simplă motivare istorică”¹⁸¹.

Faptul că nu se acordă nici o importanță specificului intuiționist al operațiilor logice se vede de altfel și din modul în care sînt utilizate semnele lor. În Σ_{K1} , de exemplu, operațiile logice sînt introduse în manieră pur formalistă, prin simboluri, fără nici o explicare. Unele semne sînt cele obișnuite în logica intuiționistă, ca $\neg$, $\vee$, $\wedge$, dar altele, ca $\&$ din (3), (4a) și (4b), sînt cele utilizate în logica formalistă. La fel se întîmplă și în Σ_{sm} , în care apar formule ca (A_{D23}) $a \wedge b \rightarrow a$, unde $\wedge$ este semn intuiționist, iar $\rightarrow$ este formalist. Semnele operațiilor sînt introduse deci în mod arbitrar.

Sistemele Σ_{K1} , Σ_T și Σ_{sm} nu sînt Σ_{Int} , dar nu sînt nici simple sisteme Σ_{Form} . Ele nu sînt Σ_{Int} , deoarece variabilele și semnele de operație nu mai au semnificație intuiționistă; ele nu sînt Σ_{Form} , deoarece în cadrul lor nu sînt valabile *tertium non datur*, *duplex negatio* și toate expresiile care pot fi obținute prin intermediul acestora; ele sînt deci sisteme formalist-neointuiționiste, respectiv Σ_{FN} . Sistemele Σ_{FN} sînt formaliste în măsura în care pierd semnificația intuiționistă a variabilelor și a operațiilor logice și sînt intuiționiste în

¹⁷⁷ P. Lorenzen, *Formale Logik*, Berlin, 1970, p. 80.

¹⁷⁸ *Ibidem*, p. 93.

¹⁷⁹ A. Schmidt, *Mathematische Gesetze der Logik*, Springer-Verlag, 1960, p. 6 sq.

¹⁸⁰ *Ibidem*, p. 356.

¹⁸¹ *Ibidem*, p. 343.

măsura în care bifează axiomele discutabile. Deoarece variabilele și operațiile logice sînt independente de axiome și stau la baza acestora, sistemele Σ_{FN} sînt mai mult formaliste decît intuïționiste.

Într-adevăr, dacă este vorba de $a \vee \neg a$, în care semnele nu mai au sens intuïționist, este imposibil să se decidă dacă expresia este acceptabilă sau nu fără să se facă apel la axiomele unui sistem Σ_{FN} . Dacă semnele au sens intuïționist, atunci se poate decide și fără intermediul axiomelor.

Din acest punct de vedere, se poate conchide că sistemele Σ_{FN} reprezintă selectarea și menținerea trăsăturilor pur formale, independente de orice conținut, ale sistemelor Σ_{Int} și $\Sigma_{F/I}$, respectiv concordanța cu teza (VI),

b) *Specificul sistemelor formalist-neointuïționiste*

De obicei, sistemele Σ_{FN} nu numai că sînt numite intuïționiste, cum menționează Schmidt, dar se consideră că reprezintă însăși *logica intuïționistă*, la care este redusă în ultimă instanță întreaga teorie intuïționistă = poziția formalismului neointuïționist. Contra acestei poziții a reacționat Heyting. „Intuïționismul, consideră el, nu poate fi înlocuit cu astfel de interpretări formale”¹⁸². Aceasta nu înseamnă însă că sistemele Σ_{FN} nu au importanță din punct de vedere intuïționist.

Dacă se stabilește de la început că *orice* Σ_{FN} reprezintă doar „surprinderea și menținerea trăsăturilor pur formale ale sistemelor Σ_{Int} și $\Sigma_{F/I}$ ”, ceea ce înseamnă surprinderea și menținerea trăsăturilor pur formale ale *întregii teorii intuïționiste*, atunci poate fi depășită poziția formalismului neointuïționist și pot fi valorificate rezultatele formale obținute pe această cale.

Sistemele Σ_{Int} și $\Sigma_{F/I}$ pot fi numite *modele* sau „codificări” care reproduc pe plan formal o parte dintre particularitățile logice pe care le determină tezele intuïționiste în cadrul teoriei intuitive. Sistemele Σ_{FN} sînt *modele ale acestor modele*, ele nu au și nu pot avea nici o legătură directă cu intuïționismul.

Reprezentanții formalismului neointuïționist sînt însă de altă părere. Sistemele Σ_{FN} nu sînt elaborate pentru a modela sistemele

¹⁸² A. Heyting, *Logique et intuitionnisme*, p. 82.

intuiționiste, ci sînt utilizate pentru așa-numita „construcție formalistă” a matematicii intuiționiste.

Comparînd lucrarea lui Heyting (*Intuitionism. An introduction*) cu lucrarea lui Kreisel și Troelstra (*Formal systems for some branches of intuitionistic analysis*) se observă imediat diferența radicală de metodă. Heyting expune matematica intuiționistă *independent* de logică și *înaintea* acesteia. Σ_{Hy} apare ca un apendice, care poate fi luat în considerație sau nu. Kreisel și Troelstra încep cu expunerea sistemului logic. Această inversare de planuri este evident străină intuiționismului, căci, din această perspectivă, nu matematica se dovedește fundamentul logicii, ci logica devine fundamentul matematicii, ceea ce contravine tezei (IV). Intuiționistic vorbind, matematica nu are nevoie de nici o justificare logică; dimpotrivă, logica, în măsura în care a ajuns la un grad evoluat de simbolizare, trebuie, pentru a deveni o teorie sau un sistem necontradictoriu, pentru a-și asigura criteriul exactității, să apeleze la matematici.

Chiar dacă sistemele formaliste nu ar fi considerate mijloace de construcție ale matematicii intuiționiste, cum se face de regulă, afirmîndu-se chiar că Brouwer însuși ar fi lucrat, fără să-și dea seama, în mod formalist¹⁸³ ceea ce ar încălca teza intuiționistă (VII), ci se admite că sistemele formaliste ar descrie doar și ar sistematiza matematica intuiționistă, tot s-ar ajunge la o concepție neintuiționistă, deoarece ar fi încălcată prima parte a tezei (I) — fundamentală pentru doctrina intuiționistă — după care matematica este o *activitate*, care trebuie practică, și *nu o teorie*, gata făcută.

Dealtfel, indiferent de semnificația care ar fi atribuită sistemelor Σ_{FN} , acestea nu pot fi puse în corespondență directă cu matematica intuiționistă, deoarece ultima se găsește în „stadiul întii”, iar sistemele Σ_{FN} se găsesc în „stadiul patru”, alcătuiind „matematica de ordinul doi”. În plus, construcția sistemelor Σ_{FN} nu are nici o legătură reală cu stadiile intermediare, ci doar, așa cum s-a menționat, o legătură aparentă cu sistemele formale intuiționiste, pe baza tezei (VI). Însă sistemele formale intuiționiste, ele însele nu sînt decît parțial izomorfe cu teoria intuitivă a logicii intuiționiste, singura care este legată direct de matematică.

Din această cauză, formalistii neointuiționiști, pentru a obține corespondența sperată, încearcă în prealabil transpunerea matematicii intuiționiste de ordinul întii, a *activității* matematice într-o

¹⁸³ J. Myhill, *The formalisation of intuitionism*, în „La philosophie contemporaine”, Firenze, 1968, p. 325.

matematică de ordinul doi, într-o *teorie* a matematicii, denaturînd astfel conceptele fundamentale ale celei originare.

Heyting menționează cîteva dintre aceste denaturări indispensabile formalismului neointuïționist. Astfel, conceptul de „succesiune *care înaintează* infinit” trebuie să devină „succesiune infinită”¹⁸⁴. Alte concepte, ca cel de „alegere” sau cel de „subiect creator”, fundamentele pentru *activitatea* matematică, nu pot fi nici măcar denaturate, căci nu au nici o semnificație în *teoria* constituită a matematicii.

Myhill consideră că insuccesele formalismului neointuïționist, în încercarea de a transforma matematica intuïționistă într-una formalistă, ceea ce ar coincide cu „lichidarea” intuïționismului, prin formalizarea ei deplină și fundamentarea logică a tuturor rezultatelor intuïționiste, nu este o dovadă că formalismul în genere nu ar putea să ajungă la acest rezultat, ci doar o dovadă a faptului că nu este *încă* destul de flexibil și de subtil pentru o astfel de sarcină¹⁸⁵.

Prin urmare, sistemele Σ_{FN} se dovedesc nu numai *îndepărtate* de matematica intuïționistă și de logica acesteia, dar și *contrare* principalelor teze intuïționiste, cu excepția tezei (VI), și chiar intuïționismului în genere.

Făcînd abstracție de aceste probleme, care nu interesează direct în lucrarea de față, sistemele Σ_{FN} vor fi considerate ca modele ale sistemelor Σ_{Int} și $\Sigma_{F/I}$, ca menținînd o parte din trăsăturile formale ale acestora din urmă. În acest sens, vor fi urmărite în continuare *implicațiile formaliste* ale sistemelor Σ_{FN} în contextul general al logicii moderne.

1° *Semnificația negației în sistemele Σ_{FN}*

Una din trăsăturile fundamentale ale oricărui Σ_{FN} o constituie importanța acordată negației. Negația nu mai reprezintă o simplă operație logică, alături de celelalte, ci devine o caracteristică a sistemului formal. Adăugarea sau omiterea ei nu mai înseamnă pur și simplu redarea *aceleiași* logici prin intermediul altor operatori, cum se petrece, în cadrul sistemelor formaliste obișnuite. Aceeași logică poate fi redată formalistic prin implicație și negație (Frege, Lukasiewicz),

¹⁸⁴ A. Heyting, *Intuitionism in mathematics*, în : „La philosophie contemporaine”, Firenze, 1968, p. 320.

¹⁸⁵ J. Myhill, *Formal systems of intuitionistic analysis I*, în : „Logic, methodology and Philosophy of Science”, III, Amsterdam, 1968, p. 162.

implicație și disjuncție (Russell), conjuncție și negație (Sobocinski — 1939) ș.a.m.d.

Un sistem Σ_{FN} este un sistem Σ_{fn} (fără negație) dacă nu conține nici o *axiomă* în care să apară negația și nici o *definiție* prin care să fie introdusă. Sistemul lui Russell conține axiome în care nu apare negația, ci numai implicația și disjuncția, dar Σ_R nu este un Σ_{fn} deoarece implicația ($p \rightarrow q$) este o simplă abreviere a formulei ($\sim p \vee q$), care conține negația.

Nici un sistem Σ_{FN} fără negație, nu poate fi un Σ_{Int} , căci niciunul nu coincide cu sistemul lui Griss. Într-adevăr Σ_{Gr} conține numai implicația și conjuncția, fără nici o definiție abreviativă. Deci nici o expresie care conține alți operatori, afară de conjuncție și implicație, nu este valabilă în Σ_{Gr} . De exemplu formula $p \rightarrow (p \vee q)$, care apare ca axiomă în toate sistemele Σ_{FN} , nu este valabilă în Σ_{Gr} , deși nu conține negația.

Sistemele Σ_{FN} reproduc însă, în calitate de Σ_{fn} , trăsătura pur formală a sistemului Σ_{Gr} , prin aceea că în cadrul lor *nu este aplicabilă demonstrația lui Gödel*. Sistemele Σ_{fn} se dovedesc astfel modele formale ale sistemului Σ_{Gr} , care la rândul său este un model al teoriei intuitive a logicii intuitionaliste.

Adăugarea negației, prin axiome care conțin negația (Σ_{sm}) sau prin definiția negației, permite aplicarea demonstrației lui Gödel, cu toate că simpla introducere a negației nu înseamnă admiterea legii tertului exclus. Deci, deși nu este valabilă ($p \vee \sim p$) se consideră că pentru orice propoziție P se poate demonstra sau P sau $\sim P$, iar acest lucru nu este valabil (după Gödel).

Situația aceasta a fost observată de P. Lorenzen, care studiază pe larg problema negației. El constată că există mai multe accepții ale negației. Se poate vorbi, în primul rând de negația care apare în cadrul propozițiilor elementare¹⁸⁶. „Socrate nu este om” este negația propoziției „Socrate este om”. Redate prin apartenență, se obțin două expresii opuse

$$(s \in \Omega) \text{ și } (s \sim \in \Omega).$$

Față de acest tip de negație, poate fi introdusă alta care se referă la întreaga propoziție și se obține

$$(40) \quad \sim (s \in \Omega) = (s \sim \in \Omega),$$

$$(41) \quad \sim (s \sim \in \Omega) = (s \in \Omega),$$

¹⁸⁶ Cf. P. Lorenzen, *Formale Logik*, p. 87—88.

Formula (41) seamănă deja cu *negatio duplex*, deși cele două negații nu sînt de același tip. *Tertium non datur* poate să apară însă și la nivelul primei negații, astfel

$$(42) \quad (s \in \Omega) \vee (s \sim \in \Omega).$$

Negatio duplex poate fi coborîtă și ea chiar la nivelul termenilor, dacă se introduce o negație specială și pentru ei, de exemplu

$$(43) \quad (s \sim \in \sim \Omega) = (s \in \Omega).$$

Tertium non datur la acest nivel poate să ia forma

$$(44) \quad (s \in \Omega) \vee (s \in \sim \Omega)$$

Însă numai dacă se face abstracție de structura propozițiilor elementare, atunci se poate vorbi de o *duplex natio* propriu-zisă, ca în

$$(45) \quad \sim \sim p = p,$$

în care cele două semne sînt de același tip.

Pentru *tertium non datur* formulele

$$(46) \quad (s \in \Omega) \vee \sim (s \in \Omega),$$

$$(47) \quad (s \sim \in \Omega) \vee \sim (s \sim \in \Omega),$$

$$(48) \quad (s \in \sim \Omega) \vee \sim (s \in \sim \Omega),$$

$$(49) \quad (s \sim \in \sim \Omega) \vee \sim (s \sim \in \sim \Omega),$$

sînt toate de același tip cu

$$(50) \quad p \vee \sim p,$$

căci aici contează doar negația dinafara parantezelor.

Excluderea formulei (50) înseamnă deci excluderea tuturor formelor de terț exclus *subordonate* lui $(p \vee \sim p)$. Dar mai există un tip de negație care nu este subordonat lui $(p \vee \sim p)$. Într-adevăr, expresia (T') poate fi transcrisă și în forma

$$(T'') \quad \Delta P \vee \sim \Delta P.$$

căci $\Delta \sim P$ înseamnă același lucru cu $\sim \Delta P$, respectiv „se demonstrează $\sim P$ ” înseamnă „nu se demonstrează P ”. La acest nivel intervine restricția lui Gödel.

Se poate conchide că admiterea negației fără admiterea formulei $(p \vee \sim p)$ nu înseamnă excluderea oricărei forme de terț exclus.

Admiterea demonstrației lui Gödel înseamnă admiterea cerinței de a exclude *orice formă* a terțului exclus; acest lucru nu poate fi realizat decât prin excluderea *totală* a negației.

Excluderea totală a negației duce, într-adevăr, la ceea ce ar putea fi numit un „calcul perfect”, lipsit de orice contradicții. Un astfel de calcul perfect este orice Σ_{fn} , care reproduce pe plan formalist, arbitrar „perfecțiunea” sistemului Σ_{Gr} .

Dar toate sistemele Σ_{fn} reproduc o dată cu „perfecțiunea” și *lipsa de efectivitate* a sistemului Σ_{Gr} . Dacă sînt admise *numai* expresiile *asertate*, așa cum se întîmplă în Σ_{Gr} , este evident că logica devine doar un mijloc de sistematizare a unor *rezultate logice obținute deja* prin simpla exprimare a construcțiilor matematice intuitive. Sistemele Σ_{fn} sînt sisteme *afirmative*, căci afirmă rezultatele ferme ale matematicii intuiționiste și sînt *pozitive*, căci poartă aici numai asupra a ceea ce există, dar le lipsește *efectivitatea*.

Adăugarea negației, înseamnă după P. Lorenzen *efectivizarea* sistemelor formale. Ce-i drept, logica efectivă nu se reduce doar la adăugarea negației, căci aceasta determină și restrîngerea celorlalte operații la semnificația lor efectivă¹⁸⁷. Dar și invers, semnificația efectivă a operațiilor logice presupune negația, căci calculul lui Heyting, la care se referă Lorenzen, conține negația. S-ar putea vorbi, în termenii lui Lorenzen, despre o diferență între semnificația doar „operativă” și semnificația „efectivă” a operațiilor logice. Lorenzen concepe un calcul cu semne care nu au nici o semnificație. Asupra acestor semne pot fi efectuate anumite operații pe baza unor reguli. Calculul K_2 , de exemplu¹⁸⁸, are un început (A_1) și două reguli (R_1) și (R_2). Se operează asupra semnelor „○” și „●” și sînt utilizate variabilele a și b . (A_1) este „○”, iar (R_1) este $a \Rightarrow a \bullet$ și (R_2) este $a, b \Rightarrow ab$. Pe cale pur operativă poate fi obținut, de exemplu, „○●●○●○●●●”. Se procedează astfel:

- | | | |
|-----|-----------|---------------------------------|
| (1) | ○ | (A_1) |
| (2) | ○● | (R_1); $1 \Rightarrow 2$ |
| (3) | ○●● | (R_1); $2 \Rightarrow 3$ |
| (4) | ○●●○● | (R_2); $3, 2 \Rightarrow 4$ |
| (5) | ○●●● | (R_1); $3 \Rightarrow 5$ |
| (6) | ○●●○●○●●● | (R_2); $4, 5 \Rightarrow 6$ |

¹⁸⁷ Cf. P. Lorenzen, *Metamathematik*, Mannheim, 1962, p. 12.

¹⁸⁸ Cf. P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer-Verlag, 1969, p. 13.

Operațiile logice din cadrul unui calcul Σ_{fn} au numai o astfel de semnificație „operativă”. Adică fiind dată o expresie, ea poate fi obținută *operînd* asupra unei alte expresii dată inițial. Efectivitatea pare să rezulte din respingerea falsului sau a contradicției, pe care le introduce negația. Negația nu mai este concepută în Σ_{Ln} (sistemul lui Lorenzen cu negație) ca simplă *operație* care semnifică trecerea de la p la $\sim p$. $\sim p$ este definit drept $p \rightarrow \Upsilon$. Aici negația are un efect și anume falsul sau contradicția; $\sim p$ nu mai poate fi considerat adevărat ca în Σ_C , respectiv „dacă este fals p , atunci este adevărat $\sim p$ ”.

Calculul efectiv, respectiv Σ_{FN} este mai bogat decît calculul operativ, respectiv Σ_{fn} , căci în Σ_{FN} nu numai că se poate demonstra P , dar pentru oricare P se poate demonstra sau P sau $\sim P$. Efectivitatea aduce însă cu sine pericolul contradicției (demonstrația lui Gödel).

Trebuie subliniat aici faptul că efectivitatea sistemelor Σ_{FN} este o efectivitate pur logică; ea nu are și nu poate să aibă nici o influență asupra matematicii intuiționiste, care este efectivă *independent* de acest nivel logic.

2°. Semnificația principiilor logice

Sistemele Σ_{FN} sînt sisteme în care nu sînt valabile *tertium non datur* și *negatio duplex*. Acest lucru reflectă pe plan pur formal *critica* intuiționistă a principiilor logice, determinată de concepția dialectică a intuiționiștilor în fundamentele matematicilor.

În sistemele Σ_{form} legile logice erau reduse la simple formule tautologice. Uneori apăreau, ce-i drept, și ca axiome (în sistemul lui Frege apare $(A_5) \sim \sim p \rightarrow p$), dar fără să joace un rol deosebit. Simplul fapt că ele erau deductibile din alte formule (în cel puțin un sistem) însemna că nu mai pot fi considerate drept *legi fundamentale* ale logicii.

Din punct de vedere pur formal în orice Σ_{FN} se constată că *tertium non datur* și *negatio duplex* au un statut deosebit, existînd posibilitatea respingerii lor *simultane*. Respingerea lor nu implică însă respingerea celorlalte legi, respectiv a principiului identității și non-contradicției. Istoric s-a constatat faptul invers, că respingerea principiului identității și a principiului noncontradicției implică și res-

pingerea lui *tertium non datur* și respectiv a lui *negatio duplex*¹⁸⁹. „Respingerea” are aici sensul de contestare a valabilității universale, care formal implică faptul că legile în discuție nu mai pot fi considerate tautologii.

Barzin și Errera au atras atenția asupra faptului că „Principiile logice nu sînt adevăruri izolate unele de altele, astfel încît să le admitem pe unele, iar pe celelalte să le respingem. Ele formează un mănunchi bine legat. Dacă atingem una din părțile ansamblului, atunci toate celelalte trebuie să fie modificate”¹⁹⁰. Se constată însă că acest „ansamblu de legi” dacă este transpus pe plan pur formal, prin transformarea legilor în tautologii se divide în două părți: una care conține legea identității și legea noncontradicției și alta care conține legea tertului exclus și legea dublei negații (legea temeiului sau a rațiunii suficiente nu apare în formă tautologică).

Raportul dintre legi în cadrul celor două părți este evident, dacă este respinsă una, atunci trebuie respinsă și cealaltă. În ce privește admiterea lor, este discutabil dacă ele se presupun reciproc sau nu. Johansson a demonstrat că în Σ_I admiterea lui $\neg \neg a \supset a$ presupune și admiterea lui $a \vee \neg a$, dar invers nu. Numai din $a \vee \neg a$, fără a fi utilizată și $(a \wedge \neg a) \supset b$, în Σ_I nu poate fi dedus $\neg \neg a \supset a$. Aceasta înseamnă că, în anumite calcule formale, *negatio duplex* este „mai tare” decît *tertium non datur*.

În ce privește raportul dintre legea identității și a noncontradicției, pare evident că a doua o presupune pe prima, pe cînd prima nu o presupune pe a doua, dar acest lucru ar trebui demonstrat, respectiv ar trebui demonstrat dacă întotdeauna sau numai în anumite calcule are loc această relație, sau dacă, dimpotrivă, nu are loc și relația inversă.

Deci există o conexiune în ansamblul legilor logice, dar nu à la Barzin și Errera, după care fiecare lege în parte ar influența întregul ansamblu.

Adăugarea uneia dintre legile grupei a doua (*tertium non datur* sau *negatio duplex*) transformă sistemele Σ_{FN} în sisteme Σ_C , respectiv în sisteme Σ_{form} . Este interesant faptul că P. Lorenzen, vorbind despre această trecere, în cadrul calculelor cu predicate, respectiv evantoriale, numește „calcul evantorial fictiv”¹⁹¹ calculul evantorial Σ_{FN}

¹⁸⁹ Al. Surdu, *Probleme logice, formaliste și intuiționiste în filozofia greacă, în „Probleme de logică”, vol. VI, Buc. 1975, p. 160–161.*

¹⁹⁰ M. Barzin și A. Errera, *Sur le principe du tiers exclu*, p. 18.

¹⁹¹ P. Lorenzen, *op. cit.*, p. 78.

la care se adaugă *tertium non datur* și în care devine valabilă formula $\sim \sim p = p$. Calculul clasic este fictiv deoarece o parte din formele sale „sint valabile numai în calcule speciale”¹⁹². Aceste calcule privesc propozițiile elementare. În terminologia noastră este vorba de calcule care conțin forme ale legii terțului exclus *subordonate* lui $(p \vee \sim p)$.

În logica intuiționistă și în genere în logica modernă nu s-a pus și nici nu se poate pune problema relativizării legilor din grupa a I-a. Este interesant faptul că Brouwer însuși, a cărui concepție general filozofică abundă în probleme dialectice, imposibil de conceput atita timp cât se admite valabilitatea absolută a principiului identității și al noncontradicției, nu pune niciodată la îndoială valoarea acestora.

Acest lucru poate fi totuși justificat în contextul general al *filozofiei* neointuiționiste (în varianta lui Brouwer).

Punctul central al filozofiei lui Brouwer îl constituie *intuiția originară*. Aceasta este pe de o parte *a posteriori*, rezultatul unui proces complicat de autoinstrăinare a conștiinței, în cadrul căreia aceasta se opune sieși scindându-se în *obiect* (*Ding*) și *subiect* din a căror confruntare se naște intuiția originară, pe de alta, *a priori*, față de construcția efectivă a *lucrurilor* (*Sachen*), care nu pot fi concepute decît în cadrul unor stări de fapt, iar aceste stări, consideră Brouwer, sint produsul acțiunilor umane, *raționale*, al căror fundament îl constituie intuiția originară¹⁹³.

Din această perspectivă, făcînd abstracție de interpretarea declarat idealist-subiectivă a concepției lui Brouwer, devine evident faptul că numai în perioada *anterioară* intuiției originare, și prin aceasta rațiunii însăși, se poate vorbi de procese care nu se mai supun legilor din grupa a I-a. Dar această perioadă, în măsura în care este prerățională, nu-și are locul în știință. Brouwer lasă să se înțeleagă faptul că o situație analogă ar exista în religie și în ceea ce el numește înțelepciune (*Wijsheid*). Toate acestea sint, după părerea lui, străine de logică¹⁹⁴.

Construcția rațională a lumii este o construcție matematică, ultima avînd ea însăși o dialectică imanentă. Dialectica matematicii este dialectica timpului, a scurgerii succesive de trăiri, dezbrăcate prin abstracție de orice conținut concret și *identificate*, prin actul

¹⁹² P. Lorenzen, *Formale Logik*, p. 94.

¹⁹³ Vide amănunte în Al. Surdu, *Elemente dialectice în epistemologia intuiționistă*, Revista de filozofie, nr. 2, 1975.

¹⁹⁴ L. E. J. Brouwer, *De onbetrouwbaarheid...*, p. 7 și p. 12.

intuiției originare, drept forme goale. Acestea garantează, pentru Brouwer, principiul identității și al noncontradicției. Dar „scurgerea timpului „însăși, infinitul matematic potențial, numit și „mediul devenirii libere” nu se mai supune legilor din grupa a doua.

Faptul că în cadrul teoriei logice intuitive a matematicii intuiționiste nu apar raționamente bazate pe legile din grupa a doua se datorește tocmai paralelismului matematico-lingvistic pe baza căruia a fost construită teoria și contribuie prin urmare la *menținerea* pe plan *logico-intuitiv* a *determinațiilor dialectice ale matematicii intuiționiste*. Excluderea axiomelor, care conțin principii din grupa a doua, din cadrul sistemelor Σ_I și $\Sigma_{F/I}$, se datorește faptului că acestea sînt modele parțial izomorfe cu teoria intuitivă. Ele *reproduc* deci, pe plan pur formal, o parte din *notele dialectice ale teoriei intuitive*. În fine, sistemele Σ_{FN} , care sînt modele ale modelelor, în care este pierdută semnificația intuiționistă a variabilelor și a operațiilor logice din Σ_I și $\Sigma_{F/I}$, *reproduc*, de data aceasta pe plan *formalist*, o parte din *notele dialectice ale sistemelor formale intuiționiste* și anume *posibilitatea* de a exclude dintre axiome principiile din grupa a doua. Faptul că excluderea însăși, la acest nivel, nu mai are nici un temei evident și poate fi operată în mod arbitrar, prin simplu joc formalistic, *maschează* aspectul ei dialectic.

Dar sistemele Σ_{FN} n-au fost obținute pe această cale. Dacă nu ar fi existat matematica intuiționistă, încercările de a o descrie pe plan logico-intuitiv și sistemele intuiționiste, ar fi fost *practic imposibilă* construcția lor. Nu trebuie uitat că tocmai formalistii au fost cei mai *înverșunați adversari* ai logicii intuiționiste, deși, în aparență, ei ar fi trebuit s-o adopte cel mai ușor, fiind vorba, după ei, de „simpla bifare a unei axiome”.

În realitate, admiterea *posibilității* formaliste de excludere, a principiilor din grupa a doua înseamnă pătrunderea într-o formă foarte abstractă, a *notelor dialectice ale sistemelor formalist-neointuiționiste* în cadrul teoriei moderne a sistemelor formale.

c) Sistemul deducției naturale

De multe ori sistemul deducției naturale Σ_{Dn} a lui Gentzen, respectiv acea parte a sistemului pe care el o numește „calculul NJ” este considerat drept o „metodă de formalizare a logicii intuiționiste” alături de „metoda axiomatică a lui Heyting. „Există, spune Mostowski, o metodă mai elegantă (decît cea a lui Heyting) de for-

malizare a logicii intuiționiste, și anume metoda lui Gentzen”¹⁹⁵. În realitate, Gentzen însuși menționează faptul că el tratează nu despre teoria sau logica intuiționistă neformalizată ci „despre logica intuiționistă, sub aspectul ei formalizat pe care i l-a dat Heyting”¹⁹⁶. Este deci evident că Σ_{Dn} nu este un model logic nici al teoriei intuitive a logicii intuiționiste și nici al matematicii intuiționiste, ci un model al modelului logic Σ_{Hy} . Deci Σ_{Dn} este un sistem formalist-neointuiționist Σ_{FN} .

Scopul lui Gentzen este acela de a dezvolta raționamentele logice, cunoscute deja, într-o manieră care, consideră el, este mai apropiată de raționamentele matematice, pe care le numește „reale”.

Diferența dintre sistemele axiomatice Σ_{FN} și Σ_{Dn} constă în aceea că, în primele, formulele adevărate sînt deduse dintr-o serie de alte formule, considerate axiome, prin intermediul unui număr redus de procedee, în timp ce în Σ_{Dn} nu se pornește de la axiome, respectiv de la formule admise anterior, ci de la ipoteze cărora li se adaugă deducții logice, ca la urmă rezultatul să fie reconsiderat independent de ipotezele de la care s-a pornit.

Avantajul formal al deducției naturale îl constituie faptul că demonstrația *pornește de la formula care trebuie demonstrată*. În sistemele axiomatice, fiind dată o formulă complicată nu se poate ști de la început din care axiomă este deductibilă. Din această cauză, sînt necesare anumite operații asupra formulei pentru a o aduce la o formă convenabilă. Este vorba în realitate de o *dublă* demonstrație, una prin care formula este *reduasă* la o anumită axiomă și alta prin care este *dedusă* apoi din acea axiomă. Prima fază a demonstrației este cea mai complicată.

Deducția naturală este în fond o *decizie matricială simplificată*. Dealtfel Gentzen introduce chiar de la început semnul $\wedge$ = propoziție adevărată și $\vee$ = propoziție falsă¹⁹⁷, ceea ce înseamnă, de la început, că Σ_{Dn} nu poate să corespundă logicii intuiționiste căci operațiile logice intuiționiste nu pot fi interpretate bivalent. Altfel spus Σ_{Dn} este un *model bivalent* al sistemului Σ_{Hy} .

Considerăm exemplul lui Gentzen

$$(E_1) \quad (p \vee (q \& r)) \rightarrow ((p \vee q) \& (p \vee r)).$$

¹⁹⁵ A. Mostowski, *Formalization of the intuitionistic logic*, Acta Philosophica Fennica, XVII, 1965, p. 12.

¹⁹⁶ G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, Paris, 1955, p. 3.

¹⁹⁷ *Ibidem*, p. 8.

Dacă notăm primul membru cu A și al doilea cu B , obținem $A \rightarrow B$. Matricea bivalentă a lui $A \rightarrow B$ este

(1)

	A ,	B	$A \rightarrow B$
a	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
b	$\wedge$	$\vee$	$\vee$
c	$\vee$	$\wedge$	$\wedge$
d	$\vee$	$\vee$	$\wedge$

Se constată că $A \rightarrow B$ este falsă ($\vee$) numai dacă A este adevărat ($\wedge$) și B fals ($\vee$), în restul cazurilor este adevărată. Din matricea implicației este reținut numai cazul b, ceea ce înseamnă o simplificare a matricei respective. Problema care se pune este următoarea: este oare posibil, în cazul lui (E_1) ca A să fie adevărat și B fals? Pentru a soluționa problema se presupune că A ar fi adevărat și se cercetează B în funcție de această presupunere. Dacă presupunind că A este adevărat, B se va dovedi fals, atunci $A \rightarrow B$ va fi falsă; în caz contrar va fi adevărată.

Presupunem deci că A este ($\wedge$), respectiv că

(2) $(p \vee (q \& r)) = \text{Adevărat.}$

Expresia (2) conține trei variabile diferite. Dacă notăm valorile lor posibile una față de cealaltă obținem

(3)

	p	q	r
a	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
b	$\wedge$	$\vee$	$\vee$
c	$\wedge$	$\wedge$	$\vee$
d	$\vee$	$\vee$	$\vee$
e	$\vee$	$\vee$	$\wedge$
f	$\vee$	$\wedge$	$\wedge$
g	$\wedge$	$\vee$	$\wedge$
h	$\vee$	$\wedge$	$\vee$

Dacă notăm cei doi membri ai disjuncției (2) cu C și D obținem matricea disjuncției

(4)

	C ,	D	$C \vee D$
a	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
b	$\vee$	$\vee$	$\wedge$
c	$\vee$	$\wedge$	$\wedge$
d	$\vee$	$\vee$	$\vee$

Constatăm că este suficient ca unul dintre membrii disjuncției să fie adevărat pentru ca disjuncția să fie adevărată. Reducem deci cazurile a, b, c, d la b și c. Aceasta este a II-a simplificare, de data aceasta în matricea disjuncției.

Presupunem că ar fi adevărat primul membru, respectiv p . Urmărim în (3) și observăm că p este (Δ) în cazurile a, b, c, g. Reducem întreaga matrice la aceste cazuri (a III-a simplificare). Ea devine:

(5)

	p	q	r
a	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
b	$\wedge$	$\vee$	$\vee$
c	$\wedge$	$\wedge$	$\vee$
g	$\wedge$	$\vee$	$\wedge$

Cercetăm acum membrul B al lui (E_1) . El conține conjuncția $(p \vee q) \& (p \vee r)$. Notînd primul membru cu E și al doilea cu F obținem matricea (6) cu patru cazuri, pe care le reducem la unul singur (cînd ambii membri sînt adevărați = a IV-a simplificare). Considerăm apoi fiecare membru în parte, ceea ce presupune încă două matrice (7) și (8), la care se aplică de două ori simplificarea a II-a de la matricea (4), respectiv se presupune că cel puțin un membru trebuie să fie adevărat. Dar atît în E cît și în F unul dintre membri este p , iar p , conform matricei (3) este adevărat indiferent de valoarea lui q , deci $(p \vee q)$ este adevărată dacă e adevărat p și indiferent de valoarea lui r , deci $(p \vee q)$ este adevărată. Dar ambele fiind adevărate este

adevărată și conjuncția $(p \vee q) \& (p \vee r)$. Prin urmare, dacă p din primul membru al expresiei E_1 este adevărat, atunci este adevărat și al doilea.

Același lucru trebuie verificat apoi și pentru cazul în care $(q \& r)$ este adevărat, respectiv al doilea membru al disjuncției (2). Operînd numai cu simplificările obținem: atît q cît și r sînt adevărate; q fiind adevărat, este adevărată $(p \vee q)$; r fiind adevărat este adevărată $(p \vee r)$; $(q \& r)$ fiind adevărată este adevărată și $(p \vee q) \& (p \vee r)$; dacă este adevărat primul membru al implicației E_1 este adevărat și al doilea, deci E_1 este adevărat.

Deductia naturală reprezintă prin urmare o simplificare substanțială a deciziei matriciale.

În calculul Σ_{Dn} se introduc o serie de scheme care fac inutile referințele directe la matrici. Aceste scheme sînt redată prin ceea ce Gentzen numește „figuri de derivare”. De exemplu, de la p se ajunge la $(p \vee q)$ sau $(p \vee r)$ fără a mai cerceta matricea simplificată (3) pe baza figurii

$$(OE) \frac{A}{A \vee B} \text{ sau } \frac{B}{A \vee B},$$

numită „introducerea disjuncției”. Tot așa de la $(q \& r)$, dacă se admite ca adevărat, se trece automat la q și la r , căci fiind adevărat $(q \& r)$ este implicit adevărat q și adevărat r . Generalizat apare figura

$$(UB) \frac{A \& B}{A} \text{ sau } \frac{A \& B}{B}$$

numită „eliminarea conjuncției”. Tot astfel apare figura

$$(UE) \frac{A, B}{A \& B}.$$

numită „introducerea conjuncției” ș.a.m.d.

Toate aceste figuri de derivare simplifică evident decizia matricială și o maschează. Dar nici una din aceste figuri și nici aplicațiile lor nu sînt valabile fără definiția matricială a operațiilor logice. Cu toate simplificările, demonstrațiile din Σ_{Dn} sînt destul de greoaie și incomode.

Iată cum arată demonstrația lui (E_1) în Σ_{Dn} :

$$\begin{array}{c}
 \frac{p}{p \vee q} \text{ OE} \quad \frac{p}{p \vee r} \text{ OE} \quad \frac{\frac{q \& r}{q} \text{ UB} \quad \frac{q \& r}{r} \text{ UB}}{\frac{q}{p \vee q} \text{ OE} \quad \frac{r}{p \vee r} \text{ OE}} \text{ OE} \\
 \hline
 \text{UE} \quad \text{UE} \\
 \frac{p \vee (q \& r) \quad (p \vee q) \& (p \vee r) \quad (p \vee q) \& (p \vee r)}{(p \vee q) \& (p \vee r)} \text{ OB} \\
 \hline
 \text{FE} \\
 (p \vee (q \& r)) \rightarrow ((p \vee q) \& (p \vee r))
 \end{array}$$

Aici apar în plus figurile (OB) = eliminarea disjuncției și (FE) = introducerea implicației.

Deosebirea dintre decizia matricială și Σ_{Dn} o constituie faptul că în Σ_{Dn} nu sînt admise toate figurile de derivare care ar putea să rezulte matricial. Astfel nu este admisă figura

$$(DD) \frac{\sim \sim A}{A},$$

care nu este altceva decît o formă inferențială a lui *duplex negatio* care ar putea fi numită și „eliminarea dublei negații”. Dacă la Σ_{Dn} se adaugă figura (DD), atunci se obține un Σ_c , respectiv un Σ_{form} .

Σ_{Dn} este un sistem cu ajutorul căruia poate fi elaborat un calcul bivalent în care nu apar decît formulele admise în Σ_{Hy} , este prin urmare un model bivalent al lui Σ_{Hy} . Temeiul său îl constituie faptul că toate formulele din Σ_{Hy} sînt demonstrabile în Σ_c ; problema este doar aceea de a introduce restricții prin care să nu poată fi demonstrate și formule care sînt valabile în Σ_c dar nu sînt valabile în Σ_{Hy} .

Pe de altă parte, figurile de derivare pot fi transcrise și utilizate ca axiome, dacă linia despărțitoare este înlocuită cu semnul implicației, ca în cazurile

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \& B}{A} \text{ care devine } (A \& B) \rightarrow A \\
 \frac{A \& B}{B} \text{ care devine } (A \& B) \rightarrow B
 \end{array}$$

R. Harrop, care încearcă o expunere originală a sistemului Σ_{HN} , elaborează două modele Σ_{FN} , unul axiomatic și altul natural folosind aceleași formule transcrise dintr-un calcul în celălalt¹⁹⁸.

Sistemul său Σ_{FR} conține axiome ca :

- (1) $p \rightarrow (q \rightarrow p),$
 (2) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)),$

care în calculul natural devin

$$(1') \quad \frac{p}{q \rightarrow p} \quad (2') \quad \frac{p \rightarrow q}{(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)}$$

Utilizînd deducția naturală, P. G. J. Vredenduin încearcă elaborarea unui sistem Σ_{fn} , cu intenția clară de a modela sistemul Σ_{Gr} ¹⁹⁹. Lucrînd strict formal își permite să introducă în sistemul său (Σ_{vr}) operatorul disjuncției drept „semn nedefinit”, cu toate că disjuncția nu are sens în Σ_{Gr} . Prin aceasta, Σ_{vr} se dovedește a fi un sistem obișnuit Σ_{FN} în care, spre deosebire de cele studiate, se încearcă reintroducerea negației în sensul lui Glimore, adică prin intermediul relațiilor „= ” (identic) și „# ” (distinct)²⁰⁰. În felul acesta este introdusă definiția negației

$$\sim p(x) =_{df} p(y) \rightarrow y \# x.$$

Aceasta consideră el „nu este o negație propriu-zisă”. Dar astfel, după cum remarcă și Heyting, „în calculul lui Vredenduin se poate obține legea terțului exclus”²⁰¹, și deci Σ_{vr} nu poate fi considerat drept model adecvat pentru Σ_{Gr} .

d) *Modelele semantice ale lui Beth*

Pornind de la distincțiile, introduse de Brouwer, între matematica de ordinul întâi și cea de ordinul doi, dar făcînd abstracție de celelalte ordine și încercînd o interpretare originală a ordinelor admise,

¹⁹⁸ Cf. R. Harrop, *On disjunctions and existential statements*, Math. Annalen, 132, p. 349—350.

¹⁹⁹ Cf. P. G. J. Vredenduin, *The logic of negationless mathematics*, Compositio Mathematica, 11, 1953, p. 204.

²⁰⁰ *Ibidem*, p. 226.

²⁰¹ A. Heyting, *Intuitionism in mathematics*, p. 110.

dar inadecvată teoriei lui Brouwer, filozoful olandez E. W. Beth, urmînd calea logicistă a cercetărilor semantice, în speță a metodelor lui Tarski, inaugurează așa-numita „construcție semantică a logicii intuiționiste”.

El consideră că matematica de ordinul întii sau „metoda matematică” este orientată către entitățile matematice (numere, progrese, funcții, mulțimi) și către proprietățile și relațiile reciproce dintre aceste entități²⁰². Această opinie, corectă din punct de vedere clasic, nu este însă admisibilă din punct de vedere intuiționist. Într-adevăr, pe această cale se poate considera, foarte simplu, că entitățile matematice preexistă construcției lor intuitive. „Comunicarea rezultatelor”, care necesită „denumiri pentru entitățile matematice, cît și pentru proprietățile și relațiile lor” = „terminologia matematică”, ține tot de matematica de ordinul întii (la Brouwer „terminologia matematică” apare în *stadiul al doilea* al matematicii de ordinul întii). Matematica de ordinul doi, consideră Beth, este același lucru cu metamatematica sau teoria demonstrației a lui Hilbert; ea nu este orientată către entitățile matematice sau relațiile și proprietățile lor, ci către elementele terminologiei matematice, către propoziții, definiții, demonstrații, obținute prin combinarea elementelor terminologice. Pentru a obține rezultate nu mai este necesar să fie utilizate „numele entităților matematice, ale relațiilor și ale proprietăților, ci numele elementelor terminologiei matematice, a căror totalitate constituie terminologia metamatematică”.

Aici este vorba, într-adevăr, de matematica de ordinul doi. Brouwerian vorbind, este vorba de *stadiul patru* al dezvoltării matematice, care nu mai prezintă interes pentru intuiționist. Beth sare peste *stadiul trei*, stadiul „paralelismului logico-matematic”. Acest salt înseamnă de fapt ignorarea premiselor intuiționiste ale logicii sau, altfel spus, imposibilitatea construcției unei logici a matematicii intuiționiste.

Obiectul analizei semantice îl constituie deci „numele elementelor terminologiei matematice”. Deoarece aici nu este vorba de matematica intuiționistă, acest lucru poate fi exemplificat astfel: „ $1 + 1 = 2$ ” este o *relație matematică* (intuiționistic ar fi expresia unei construcții matematice mentale), *numele* ei este „relația de egalitate dintre « $1 + 1$ » și « 2 »” (intuiționistic ar fi vorba despre același lucru exprimat cu alte semne), care este un *element al termino-*

²⁰² E. W. Beth, *Semantical considerations on intuitionistic mathematics*, *Indagationes Mathematicae*, IX, 1947, p. 572.

logiei matematice; numele acestui „element al terminologiei matematice” este o „constantă propozițională”, dacă se lucrează în calculul cu propoziții, sau pur și simplu o „propoziție”. Ceea ce interesează aici nu mai sînt relațiile dintre „relații matematice”, ci relațiile dintre „propoziții”, deci relațiile logice.

Dacă se merge pe linie intuiționistă, atunci relațiile logice reprezintă *generalizarea* relațiilor matematice sau generalizarea relațiilor dintre entitățile matematice și expresiile lor lingvistice, cum era cazul formulei

$$(2) \quad ((\alpha =_{df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{df} 2 + 1)) \supset (\alpha = \beta),$$

generalizată prin

$$(3) \quad (a \wedge b) \supset c.$$

Intuiționistic deci se știe ce poate să reprezinte (3) și nu mai este necesară nici o *altă* interpretare a formulei. Formalistic însă *nu este exclusă posibilitatea* unor *alte* interpretări, de exemplu, cea dată de Lukasiewicz, după care (3) ar fi forma generală a silogismului categoric, în care „ $a \wedge b$ ” reprezintă premisele, iar „ c ” concluzia, lucru imposibil de admis din perspectiva intuiționistă în care variabilele erau numai pentru constante care exprimă construcții matematice.

Beth pornește de la formule de tipul (3) și se întreabă care este semnificația lor, independent de modul în care au fost obținute. Problema este deci aceea de a construi un model semantic al unor astfel de formule. El caută de asemenea „să se îndepărteze de obiectele, care din punct de vedere intuiționist pot fi ridicate contra legilor logice generale”²⁰³ prin aplicarea deducției naturale. În felul acesta, consideră Beth, este evitată formularea legilor logice, ceea ce înseamnă că ele sînt scoase din discuție. Într-adevăr, utilizarea schemelor de inferență nu presupune *a priori* valabilitatea legilor logice. Legea terțului exclus apare aici ca o simplă formulă, care nu este însă valabilă. Aceasta înseamnă că sistemul lui Beth Σ_{Bt} este un model al sistemului Σ_{Hy} și deci un Σ_{FN} .

Σ_{Bt} conține o serie de figuri de derivare²⁰⁴, cu ajutorul cărora pot fi demonstrate la Gentzen formulele în discuție. Demonstrațiile apar în forma unor „tablouri semantice” tot atît de complicate ca

²⁰³ *Ibidem*, p. 575.

²⁰⁴ Cf. E. W. Beth, *Construction sémantique de la logique intuitioniste*, Colloques internationaux du C.N.R.S., LXX, Paris, 1958, p. 80.

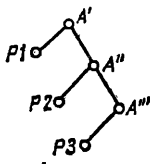
și cele ale lui Gentzen. Dar, în felul acesta, pot fi demonstrate și formule care nu sînt valabile din punct de vedere intuiționist. Problema era aceea de a găsi o metodă prin care să poată fi evitate, pe cale semantică nu prin restricții demonstrative, formulele admise clasic, dar nedemonstrabile în Σ_{HY} . Metoda lui Beth constă în aplicarea așa-numitelor „modele semantice intuiționiste”. Se înțelege că nu este exclusă posibilitatea de a introduce restricții sau „versiuni” intuiționiste ale tablourilor semantice,²⁰⁵ dar acestea ar coincide în esență cu restricțiile la Gentzen privind *tertium non datur* și *duplex negatio*.

Modelele semantice intuiționiste sînt în realitate niște scheme grafice numite și „arbori”, care ilustrează intuitiv proprietatea unui tablou semantic „de a fi închis” sau „de a rămîne deschis”. Dacă este vorba de o formulă de tipul $(A \rightarrow B)$, atunci, dacă presupunem că A este adevărat ajungem la trei situații: (1) B este adevărat și atunci $(A \rightarrow B)$ este validă (tautologie); (2) B este fals și atunci $(A \rightarrow B)$ nu este o tautologie și (3) nu se poate ști dacă B este adevărat sau fals și atunci $(A \rightarrow B)$ este respinsă din punct de vedere intuiționist. În cazurile (1) și (2) tablourile semantice sînt „închise”, adică se ajunge la o decizie, în cazul (3) tabloul rămîne „deschis”; nu se poate spune nici că formula este validă, nici că nu este validă.

Un model semantic intuiționist este un „arbore” T care poate fi descompus într-un număr finit de „subarbori” $T_{p_1}, \dots, T_{p_n}$ astfel încît o formulă autonomă A să fie legată de fiecare p_i .

De exemplu arborele (T_1) , care are trei subarbori T_{p_1} , T_{p_2} și T_{p_3} este un model al formulei A , căci A este legată de T_{p_1} , T_{p_2} , T_{p_3} , ca în graficul următor:

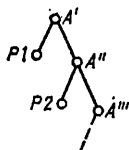
(T_1)



²⁰⁵ Cf. *Ibidem*, p. 79.

în timp ce (T_2) este un „contramodel” al formulei A , deoarece A este legată numai de T_{p1} și T_{p2} , ca în graficul următor

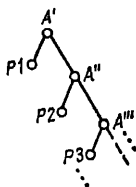
(T_2)



în care lui A''' nu-i mai corespunde nici un p .

T_1 ilustrează o formulă validă, T_2 o formulă care nu este validă. Față de acestea, arborele (T_3) , care nu are un număr finit de subarbori, ilustrează faptul că formula A este respinsă intuiționistic, deoarece nu se dovedește nici validă, nici non validă.

(T_3)



Se înțelege că acestea sînt grafice simple. În realitate există ramificații ale subarborilor și ramificații ale acestor ramificații ș.a.m.d. O expunere simplă și concisă a acestei metode se găsește la A. Mostowski²⁰⁶, care a utilizat la rîndul său această metodă pentru a demonstra nedecidabilitatea în calculul intuiționist al predicatelor²⁰⁷.

Dacă este vorba de formula²⁰⁸

$$(51) \quad (\forall x) (A \vee B(x)) \rightarrow (A \vee (\forall x) B(x)),$$

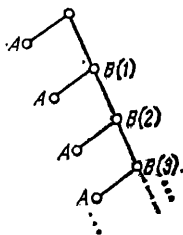
²⁰⁶ A. Mostowski, *Various interpretation of the intuitionistic logic*, Acta Philosophica Fénica, XVII, 1965, p. 82 sq.

²⁰⁷ Cf. A. Mostowski, *Proofs of non-decidability in intuitionistic functional calculus*, Journal of Symbolic logic, 13, 1948.

²⁰⁸ Vide discuția detaliată în E. W. Beth, *The foundations of mathematics*, Amsterdam, 1965, p. 444 sq.

atunci prin intermediul graficului

$$(T_{51}) \quad (\forall x) (A \vee B(x))$$



devine evident faptul că nu se poate decide dacă $(\forall x) (A \vee B(x))$ este validă sau nu și deci nu se poate decide nici dacă (51) este validă sau nu. Aici este vorba de acel tip de nedecidabilitate care presupune efectuarea unui număr infinit de operații.

Deși pornește de la matematica intuționistă, Beth nu reușește să „construiască” o logică a acestei matematici. Cauza o constituie faptul că ignoră *stadiul al treilea* al dezvoltării matematicilor și anume „paralelismul logico-matematic”. Aceasta înseamnă că formulele logice nu mai sînt obținute în calitate de expresii ale operațiilor matematice. Ele nu mai au semnificație matematică. Semnificația pe care le-o atribuie Beth (arborescentă) este un simplu joc formalistic, care nu prezintă nici un interes din punct de vedere intuționist. Dealtfel, nici Heyting n-a reușit să găsească un temei intuționist justificărilor semantice ale formulelor logice. Într-adevăr, admiterea graficelor presupune existența a *trei* tipuri de modele : *două* (model și contramodel) cu număr finit de subarbori și *unul* cu număr infinit ceea ce l-a determinat pe Heyting să remarce : „Îmi pare că Domnul Beth introduce o valoare logică intermediară alături de adevăr și fals, interpretare care nu corespunde logicii intuționiste”²⁰⁹. Cele trei tipuri de modele sugerează deci trei valori diferite ale formulelor logice.

²⁰⁹ Vide intervenția lui A. Heyting la comunicarea lui E. W. Beth, *Colloques internationaux du C.N.R.S.*, LXX, p. 83.

Se poate conchide că Σ_{Bt} constituie un model semantic *trivalent* al sistemului Σ_{Hy} , după cum Σ_{Dn} constituia un model bivalent. S-ar putea considera că Σ_{Bt} reprezintă o perfecționare a sistemului Σ_{Dn} , căci în ultimul formula $(p \vee \sim p)$ de exemplu se dovedea pur și simplu nedeductibilă, alături de celelalte formule nedeductibile (false sau consistente din punct de vedere clasic), pe când în Σ_{Bt} ea ocupă un loc aparte, respectiv *între* formulele deductibile și nedeductibile. Gentzen însuși observase, dealtfel, faptul că terțul exclus ocupă „un loc excepțional”²¹⁰. Pentru a fi admis în Σ_{Dn} , el trebuie considerat drept „formulă inițială a derivației”, drept „formulă fundamentală” sau „axiomă”, ceea ce ar însemna admiterea în Σ_{Dn} a unei formule de altă natură decât cele ipotetice, spre deosebire de *negatio duplex* care poate fi admisă drept figură de derivare (DD).

Sistemul Σ_{Bt} reproduce, prin urmare, pe plan pur formal, la nivelul unor jocuri arbitrare, trăsătura logică fundamentală a teoriei intuiționiste și anume *suspectarea legii terțului exclus*.

e) Sistemele pozitive ale lui Gr. C. Moisil

Gr. C. Moisil, cunoscut încă din 1938 pentru contribuții speciale privind interpretarea intuiționistă a silogismelor ipotetice²¹¹, a construit o serie de sisteme formalist-neointuiționiste și a precizat raporturile dintre acestea, ajungând pe această cale la construcția unei logici, din care poate fi derivat orice sistem de acest tip. El pornește de la așa-numita „logică pozitivă” a lui Hilbert și Bernays. Sistemul pe care îl prezintă conține însă și functorul disjunctiv, care nu mai apare la Hilbert și Bernays, cel puțin în ultima ediție²¹². În aceasta sînt prezentate două sisteme pozitive: unul care conține numai implicația și altul care conține, ca la Griss, implicația și con-

²¹⁰ G. Gentzen, *op. cit.*, p. 28.

²¹¹ Cf. Gr. C. Moisil, *Sur le syllogisme hypothétique dans la logique intuitionniste*; Journ. de math. pures et appl., 17, 1938. Unele rezultate obținute în această lucrare au fost menționate de către A. Heyting în *Les fondements des mathématiques*, p. 21.

²¹² Cf. D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, II, Springer-Verlag, 1970, pp. 438—455.

juncția. Moisil pornește de la un sistem care conține următoarele axiome :

- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow A),$
- (2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$
- (3) $(A \& B) \rightarrow A,$
- (4) $(A \& B) \rightarrow B,$
- (5) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \& C))),$
- (6) $A \rightarrow (A \vee B),$
- (7) $B \rightarrow (A \vee B),$
- (8) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)),$

și regula *modus ponens*, respectiv

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

El compară acest sistem (Σ_{Hp}) cu cele intuiționiste și constată că prin adăugarea negației și a unei axiome care să exprime principiul contradicției se obțin sistemele Σ_K și Σ_J . Dacă la acestea se adaugă principiul implicației adevărului prin fals se obține Σ_{Gl} și Σ_{Hy} . Dacă ultimului i se adaugă o axiomă care să exprime principiul dublei negații sau al terțului exclus se obține Σ_C . În plus, Moisil constată că adăugarea unor functori modali la Σ_C duce la sistemul lui Lewis, iar prin adăugarea functorului „excepție”, cu axiomele corespunzătoare, se obține o logică modală care poate fi restrinsă la logică trivalentă a lui Lukasiewicz ²¹³.

Cu toate că din Σ_{Hp} se pot obține sistemele enumerate, Moisil consideră că Σ_{Hp} nu este destul de general, căci nu poate servi drept calcul propozițional pentru sisteme, ca cel al lui Birkhoff și von Neumann, în care nu mai sînt valabile anumite legi distributive. Un astfel de calcul ar trebui să fie o *logică strict pozitivă*²¹⁴ (Σ_{Msp}). Originalitatea ei constă în faptul că nu conține decît doi functori : conjuncția și disjuncția. Aceasta înseamnă că trebuie să se renunțe la metoda axiomatică în favoarea unei deducții naturale a la Gentzen, în care

²¹³ Cf. Gr. C. Moisil, *Sur la logique positive*, Acta logica, 1, 1958.

²¹⁴ Cf. Gr. C. Moisil, *Sur la logique strictement positive*, Anal. Univ. Al. I. Cuza, XI, 15 (1965).

nu mai apar axiome, ci ipoteze. Dacă la Σ_{Msp} se adaugă legile distributivității conjuncției față de disjuncție, respectiv

$$(a) \quad (A \& (B \vee C)) = ((A \& B) \vee (A \& C)),$$

$$(b) \quad (A \vee (B \& C)) = ((A \vee B) \& (A \vee C)),$$

atunci se obține o *logică strict pozitivă distributivă*²¹⁵ (Σ_{Mspd}). Pe baza sistemului Σ_{Msp} poate fi construită o *logică strict simetrică*²¹⁶ (Σ_{Mss}). Dacă la aceasta se mai adaugă și principiul terțului exclus, atunci se obține o *logică a teoriei quantice*, deci un Σ_{Form} .

Interesant este faptul că Moisil construiește o logică și mai strictă decât Σ_{Msp} . Aceasta este *logica elementară* (Σ_{Me}). Deși în seria sistemelor cu care operează Moisil nu apare nici unul pur intuiționist (a la Griss), este evident că un astfel de sistem poate fi obținut cu ușurință, dacă se renunță la axiomele (6) — (8) din Σ_{Hp} , cum procedează dealtfel Hilbert și Bernays²¹⁷.

Construcția unui sistem care să nu mai conțină implicația determină renunțarea la metoda axiomatică, care se dovedește astfel un mijloc formalist *mai slab* decât deducția naturală. Logica intuiționistă, din acest punct de vedere, se dovedește a fi mai puțin strictă decât alte sisteme. În ciuda adversității pentru sisteme axiomatice, intuiționistii nu au respins metoda axiomatică, pe cînd formalistii, ducînd la extrem posibilitatea de a introduce restricții formale (eliminări de axiome, de functori etc.) sînt nevoiți să abandoneze la un anumit nivel calculul axiomatice în favoarea celui natural.

Rezultatele obținute de Gr. C. Moisil sînt deosebit de importante pentru surprinderea caracterului formalist al *tuturor* sistemelor Σ_{FN} . Dacă se face abstracție de semnificația specială a variabilelor și a operațiilor intuiționiste, ca în Σ_{FN} , atunci sistemele respective pot fi încadrate fără nici o dificultate în *ierarhia* sistemelor formaliste. Aici ele nu mai ocupă un loc aparte. Există sisteme *supra-* și *subordonate* sistemelor Σ_{FN} . Acestea din urmă pot fi obținute în ambele sensuri, fie pornind de la cele supraordonate, fie de la cele subordonate.

În contextul ierarhiei sistemelor formaliste se pierde însă și ultimele caracteristici formal-intuiționiste ale sistemelor Σ_{FN} .

²¹⁵ Gr. C. Moisil, *Încercări vechi și noi de logică neclasică*, București, 1965, p. 385.

²¹⁶ Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non chrysippiennes*, București, 1972, p. 534—539.

²¹⁷ Cf. Hilbert und Bernays, *op. cit.*, pp. 445—455.

Într-adevăr, acestea mai puteau fi numite „intuiționiste” în măsura în care corespundeau tezei (VI). Admiterea ierarhizării însă și a modalității *pur* formaliste, *cu totul arbitrară*, de obținere a sistemelor unul din celălalt, îndreptățirea *tuturor* acestor sisteme nu mai corespunde tezei (VI). Respectarea tezei (VI) presupune *infirmarea* oricărui sistem în care *tertium non datur* sau *negatio duplex* sînt universal valabile.

La nivelul ierarhizării formaliste a sistemelor se pierde în mod firesc și importanța celor două probleme esențiale ale sistemelor Σ_{FN} , respectiv problema negației și problema principiilor logice. Introducerea sau excluderea lor nu diferă cu nimic de introducerea sau excluderea altor operații logice sau altor expresii tautologice.

Dar, ținînd cont de faptul că pierderea determinațiilor de conținut ale sistemelor Σ_{FN} , în cazul ierarhizării amintite, nu înseamnă anularea lor în genere, că însăși ierarhizarea, deducția arbitrară a sistemelor nu constituie decît forma *cea mai abstractă* a teoriei sistemelor, în realitate operîndu-se cu sisteme determinate, se poate conchide că și aici se ajunge la un rezultat pozitiv pentru logica intuiționistă. Acesta poate fi formulat astfel: admiterea sistemelor formalist-neointuiționiste, care reproduc la un nivel foarte abstract notele dialectice ale logicii intuiționiste, în cadrul ierarhiei formaliste din teoria generală a sistemelor, înseamnă de fapt recunoașterea statutului ferm, formalistic al logicii intuiționiste în contextul logicii moderne.

În plus, trebuie admis și faptul că însăși această ierarhizare a fost prilejuită de existența și de diversitatea sistemelor Σ_{FN} și, în consecință, că *ierarhizarea sistemelor formale ea însăși poartă pecetea unui demers dialectic*.

ÎNCHEIERE

Filozofia neointuiționistă în genere și matematica intuiționistă în special ilustrează, în contextul gândirii teoretice contemporane, tendința științelor moderne, mai mult sau mai puțin matematizate, către o *concepție dialectică*. Această tendință este de cele mai multe ori spontană. Punctul ei de plecare îl constituie dificultățile serioase, imposibil de soluționat în contextul unei gândiri mecaniciste, pe care le provoacă reinterpretarea Obiectului și a Metodei științifice, ambele în plină dezvoltare.

Caracteristică pentru dezvoltarea fizicii moderne, de exemplu, a fost descoperirea unor noi fenomene, îmbogățirea considerabilă a Obiectului. Problemele filozofice ale fizicii moderne și îndeosebi semnificația lor dialectică sînt bine cunoscute. Pentru matematici a fost însă caracteristică dezvoltarea Metodei, Obiectul fiind adesea trecut cu vederea. Și problemele filozofice ale matematicilor moderne sînt în genere cunoscute însă semnificația lor dialectică este, de regulă, ignorată.

Particularitățile fizicii moderne au dezvăluit aspecte ale dialecticii în context ontologic, context propriu de altfel și dialecticii clasice, posthegeliene. Particularitățile matematicilor au determinat apariția unei concepții dialectice într-un domeniu în care se părea că aceasta nu-și are locul. Într-adevăr, dezvoltarea logicii matematice, simbolice s-a realizat, dacă nu în opoziție, cel puțin cu totul *independent* de orice *presupoziție* dialectică.

Rezultă totuși, în urma unei cercetări amănunțite, ca cea de față, faptul că dialectica a pătruns și aici, ce-i drept *nu direct* și într-o *formă specifică* în care este greu de recunoscut la prima vedere. Consecințele ei îndepărtate, pe planul cu totul abstract al sistemelor formaliste, pot fi recunoscute numai pe baza reproducerii întregului proces care le-au dat naștere.

Punctul de plecare îl constituie *matematica intuiționistă*. Încercările filozofilor neointuiționiști de a elabora o teorie ontologică, care

să preceadă ceea ce ei numesc *activitatea* matematică, sint pătrunse de un oarecare spirit dialectic, dar pe un fond idealist-subiectiv. Brouwer de exemplu încearcă să pună la baza ontologiei conștiința individuală, mai mult chiar *propria* lui conștiință. Aceasta s-ar găsi inițial într-o stare letargică, într-un fel de *In sine*, în subiectivitatea pură, din care nu poate ieși decît prin propria ei intervenție. Fenomenul inițial al autodepășirii de sine a conștiinței individuale este, după Brouwer, *senzația*. Ivirea senzației este primul pas către *obiectivare*, senzația transformindu-se ea însăși în *obiect*, în momentul în care mintea revine asupra ei. Această „revenire” coincide cu transformarea conștiinței, inițial nediferențiată, în subiect (*ego*) și obiect (*alter ego*). G.F.C. Griss pornește de la *unitatea* subiect-obiect, considerînd imposibilă existența independentă a unuia dintre cei doi termeni, termenul fundamental fiind și în această variantă subiectul. Ce-i drept, Griss încearcă să evite *solipsismul*, dar nu prin recunoașterea faptului că ar exista *realmente* și alte conștiințe, ci prin postularea unui fel de suflet *universal* pe care îl numește chiar *atman*. Griss, ca și Brouwer de altfel, vorbește foarte des în termenii filozofiei indiene. Dar aceste concepții, pur speculative nu au fost adoptate nici măcar de discipolii direcți, cum a fost Heyting de exemplu, ai acestor matematicieni-filozofi și au fost considerate partea cea mai vulnerabilă a filozofiei neintuiționiste ²¹⁸.

Cu toate acestea, la nivelul „mișcării iraționale a conștiinței”, dialectica intuiționistă are particularitățile obișnuite domeniului ontic. Considerațiile privind mecanismul, „autoînstrăinării conștiinței” și a „opozității sale cu sine” se bazează evident pe idei care contravin principiilor clasice ale *identității* și *noncontradicției*. În domeniul „raționalității”, identificată cu activitatea matematică, al cărei punct de plecare îl constituie „intuiția primară” identitatea și noncontradicția își redobîndesc *caracterul absolut*.

Dialectica matematicii intuiționiste are deci particularități specifice, *neontice*. „Mediul devenirii libere”, în ciuda atributelor sale dialectice nu încalcă identitatea și noncontradicția, ci numai *principiul terțului exclus* și al *dublei negații*, ambele avînd valoare *metodologică*, fiind utilizate de regulă ca *mijloace demonstrative*.

Ce-i drept, la intuiționiști nu apare explicit distincția dintre cele două tipuri de dialectică dar este evident că în domeniul ontic

²¹⁸ Într-o viitoare lucrare, consacrată în mod special *filozofiei* neintuiționiste, vom expune pe larg aceste probleme (*vide* și studiile noastre, citate la începutul acestei lucrări).

consecvența dialectică nu vizează direct principiul terțului exclus — dovadă și disconveniențele din fizica modernă, care privesc direct identitatea și noncontradicția. Pe de altă parte, lezarea identității sau a noncontradicției ar coincide cu desființarea matematicilor. Dar aceasta nu înseamnă că nu poate să existe și o „dialectică a matematicii”, iar faptul că lezează principiul terțului exclus și trebuie să-l lezeze este o consecință a „devenirii libere” = un concept întru totul dialectic.

Surprinderea principalelor *teze intuiționiste*, reduse în această lucrare la șapte, a avut menirea de a crea o ambianță dialectică *complexă*, un mediu dialectic în cadrul căruia *relativizarea* legii terțului exclus să nu mai apară drept o simplă restricție *arbitrară* și să coexiste în același timp cu *absolutizarea* noncontradicției (tezele IV și V).

Formalizarea tezelor intuiționiste a dovedit faptul că încercările cunoscute n-au respectat această ambianță; s-au bazat numai pe anumite teze, care, rupte din contextul lor, și-au pierdut semnificația originară. Din această cauză, sistemele obținute pot duce la consecințe *contrare* doctrinei intuiționiste. De aici a rezultat necesitatea elaborării prealabile a unei *teorii logice intuitive* a matematicii intuiționiste, a cărei fundamentare să rezide în respectarea strictă a *tuturor* tezelor intuiționiste.

Am încercat să demonstrăm că elaborarea unei astfel de teorii intuitive este posibilă, că Brouwer însuși a trasat liniile directoare ale unei astfel de teorii, urmărind la fiecare nivel de abstractizare consecințele punctului de plecare intuiționist.

Surprinderea deosebirii dintre *asertare* și *atestare*, esențială în acest context, ne-a permis, după precizarea semnificației intuiționiste a constantelor și a variabilelor, rezolvarea celor mai dificile probleme ale logicii intuiționiste, legate de interpretarea *negafiei* și a *operațiilor logice* în genere. Pe baza aceleiași distincții a fost posibilă *justificarea* și *încadrarea* unor doctrine, în aparentă opuse, în *aceeași* teorie intuitivă, drept cazuri particulare. Firul director care a fost urmărit pas cu pas l-a constituit respectarea cu strictețe a *paralelismului matematico-lingvistic*.

Teoria intuitivă expusă aici nu este completă. Ea poate fi dezvoltată, deosebit de interesante fiind restricțiile cu privire la raționamente și formule perfect valabile, dar fără semnificație intuiționistă. Întreaga teorie, în genere, oferă un tablou cu totul original față

de cel obișnuit în logica matematică. În ciuda faptului că pentru matematicianul intuiționist nu prezintă un interes special, teoria intuitivă oferă logicianului un teren de investigație deosebit de rodnic.

Teoria intuiționistă a sistemelor formale, după expunerea prealabilă a teoriei intuitive, își dobîndește noi dimensiuni, în conformitate cu teza (VII). Noi am prezentat sumar principalele consecințe ale interpretării sistemului Σ_{Hy} , deosebit de rodnic din punct de vedere formalist și în plină dezvoltare în ultimii ani, ca și sistemele intuiționiste diferite de Σ_{Hy} , care își găsesc însă, față de teoria intuitivă, un loc bine determinat în contextul teoriei intuiționiste a sistemelor formale. Demonstrația lui Gödel în special pune într-o cu totul altă lumină raportul dintre sistemele formale intuiționiste, dovedind faptul că izomorfismul dintre acestea și teoria intuitivă este numai *parțial*. Sisteme, ca Σ_{Hy} , care corespund extensiv în mai mare măsură teoriei intuitive, se dovedesc necorespunzătoare comprehensiv, ducînd la încălcarea tezei (V). Se constată deci, la nivelul sistemelor formale, o *sărăcire* considerabilă a teoriei intuitive, dar totodată posibilitatea obținerii unor sisteme logice *perfecte*.

Ceea ce prezintă un deosebit interes, din punct de vedere dialectic, este faptul că respectarea riguroasă a *tuturor* legilor logice, în contextul sistemelor formaliste obișnuite, deci respectarea cu strictețe și a legii terțului exclus și a dublei negații, are drept consecință, în conformitate cu demonstrația lui Gödel, *încălcarea* principiului noncontradicției (obținerea paradoxelor), în timp ce excluderea totală a celor două principii este singura garanție a *respectării absolute* a noncontradicției.

În contextul *formalismului neointuiționist*, care este prezentat aici numai pe coordonate logice, făcîndu-se abstracție de scopul său formalist = fundamentarea logică a matematicii intuiționiste, deci de implicațiile sale pur matematice, la cel mai înalt nivel de abstracțizare, răzbate totuși o parte dintre caracteristicile dialecticii matematice. Problema *negației* și a *principiilor logice* nu pot fi trecute cu vederea nici la acest nivel. Raportul dintre cele două domenii ale dialecticii ia acum forma raportului dintre cele două tipuri de legi logice. Dar acest raport se realizează prin intermediul negației.

Se ajunge la o situație în aparență curioasă. Respectarea cu strictețe a tezelor intuiționiste duce pe planul abstracției pure la *eliminarea negației* și excluderea totală a legii terțului exclus și a dublei negații. Aceste eliminări sînt reflexe ale dialecticii matematice, dar au consecințe formale aparent nedialectice, respectiv *lipsa de*

efectivitate pe care o aduce cu sine respingerea negației și *eliminarea totală a contradicției*. În schimb, respectarea rigidă a principiilor logice, reflex al unei poziții nedialectice în matematici și în ontologie în genere oferă efectivitate, prin menținerea negației, și posibilitatea contradicției. Ceea ce trebuie menționat, înainte de toate, este faptul că aici „contradicția” nu mai are sensul pozitiv ontologic. Ceea ce este contradictoriu, este, pe plan logic, inadmisibil. Aceasta înseamnă că lipsa de contradicție, în context logic formal, nu este o notă nedialectică. Problema în discuție rămîne efectivitatea.

În contextul logicii intuiționiste ar exista două variante, în cadrul cărora nu s-ar mai pune problema efectivității. Una ar fi varianta semiintuiționistă a lui Heyting, deci admiterea unui $\Sigma_{F/I}$, care să conțină negația, să fie efectiv și să elimine prin restricții axiomatiche legea terțului exclus și a dublei negații, asigurându-și notele dialectice intuiționiste, dar suferind ca orice sistem formalist obișnuit de pericolul paradoxelor. O altă variantă este aceea a lui Griss, deci admiterea unui $\Sigma_{I_{nu}}$, fără negație, deci a unui *sistem formal neefectiv*, lipsit de pericolul oricărei contradicții. Ultima variantă nu poate fi admisă însă decît în cadrul strict delimitat al celor șapte teze intuiționiste. Într-adevăr, numai admitînd faptul că matematica pură, singura asupra căreia este admisibil să poarte logica și sistemele ei (în accepție intuiționistă), este cu totul *independentă* de logică, fiind o *activitate* și nu o *teorie*, se poate admite nu numai *posibilitatea* unei logici neefective, ci și *necesitatea* ei.

Din punct de vedere general-filozofic acesta este punctul central al neointuiționismului, *incompatibil* cu oricare dintre variantele pozitivismului logic. Neopozitivistii consideră că este posibilă *construcția logică a întregii lumi* (*der logische Aufbau der Welt*), mai mult se consideră că ceea ce nu poate fi construit pe cale logică (este vorba de logica matematică) nici nu poate să existe. Toate acestea denotă în mod evident o efectivitate logică *exagerată*. Neointuiționistii dimpotrivă, consideră că logica matematică nu trebuie să aibă *nici o efectivitate*, nici măcar în matematici. Teoriile neopozitiviste, bazate pe această efectivitate exagerată, au fost studiate pe larg în literatura de specialitate; noi am încercat să conturăm premisele punctului de vedere opus. O concepție corectă trebuie să fie *intermediară*, dar trebuie, în mod evident, să pornească de la depășirea ambelor extreme.

Dificultățile semnalate mai sus și-au găsit o soluție și în *teoria generală a sistemelor*, în cadrul *ierarhizării* acestora. Este vorba de faptul că elaborarea, din perspective mai mult sau mai puțin intui-

ționiste, a unei suite de sisteme formale dovedește că nici unul dintre acestea nu poate fi considerat absolut, că fiecare dintre ele are o valoare *relativă*. Logica simbolică nu mai poate fi identificată astăzi cu *un anumit* sistem formal, indiferent de efectivitatea sau perfecțiunea lui. Încadrarea sistemelor Σ_{FN} în teoria generală a sistemelor formale, recunoașterea statutului lor formalist, dovedește posibilitățile logicii simbolice moderne de a îmbrățișa *dialecticul*, ce-i drept, nu în totalitatea lui și într-o formă cu totul specifică înaltului ei grad de abstractizare.

LISTĂ DE SEMNE ȘI PRESCURTĂRI

1. *Notăția clasico-formalistă*

$\sim$ negație

$\&$ conjuncție

$\vee$ disjuncție

$\rightarrow$ implicație

$\Rightarrow$ implicație între formule complexe

$\prec$ implicație strictă

$\square$ necesar

$\diamond$ posibil

$p, q, r, \dots$ variabile propoziționale (și uneori variabile de formule)

$A, B, C, \dots$ variabile de formule

$x, y, z, \dots$ variabile individuale

$\exists x$ cuantificator existențial

$\forall x$ cuantificator universal

$A(x), B(x), C(x), \dots$ funcții propoziționale

N, M mulțimi

$C(0, 1)$ continuul liniar

$\aleph_0$ puterea mulțimilor numărabile

$\aleph_1$ puterea mulțimilor nenumărabile

2. *Notăția intuționistă*

$\neg$ negație

$\neg_1$ negația unei proprietăți

$\wedge$ conjuncție

$\vee$ disjuncție

$\supset$ implicație

$\supset \subset$ echivalență

$\perp$ asertare

$\perp$, atestare
 $\sqcup$ asertare sau atestare (în disjuncție neexclusivă)
 $\exists x$ cuantificator existențial
 $\forall x$ cuantificator universal
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ constante matematice propoziționale
 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$ constante matematice individuale
 $a, b, c, \dots$ variabile intuiționiste
 $a_i, b_i, c_i, \dots$ variabile matematice individuale
 $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \dots$ constante nedecidabile (material)
 $P, Q, R, \dots$ proprietăți
 P^0 formulă nedecidabilă (formal)
 $\vdash$ axiomă
 $\vdash$ tautologie
 $\dashv$ contradicție
 $\perp$ consistență
 $\#$ distinct

3. Semne generale

$\rightsquigarrow$ de la...la
 $=$ echivalență; egalitate
 $=_{df}$ egal prin definiție
 $\wedge$ adevăr
 $\vee$ fals
 $\neq$ diferit
 $\emptyset$ contradicție
 Σ sistem axiomatic
 Δ demonstrabil
 $\cup$ reuniune
 $\in$ apartenență
 $\subset$ inclus în

4. Prescurtarea sistemelor logice

Σ_{Br} „sistemul Brouwer” al lui P. Lorenzen; (*vide* și Σ_{La})
 Σ_{Bt} sistemul lui Beth
 Σ_C sistemul clasic
 Σ_{Cb} sistemul clasic al lui Gödel
 Σ_D sistemul deducției naturale
 Σ_{Dn} sistemul lui D. van Dantzig

$\Sigma_{F/I}$	sisteme semiintuiționiste
Σ_{fn}	sistem fără negație
Σ_{FN}	sistem formalist neintuiționist
Σ_{Form}	sistem formalist
Σ_{Gl}	sistemul lui Glivenko
Σ_{Go}	logica lui Gonsseth
Σ_{Gr}	sistemul lui Griss
Σ_H	sistemul lui Hilbert
Σ_{Hp}	sistemul pozitiv al lui Helbert
Σ_{Hr}	sistemul lui Harrop
Σ_{Hy}	sistemul lui Heyting
Σ_{Int}	sistem intuiționist
Σ_J	sistemul lui Johansson
Σ_{Kl}	sistemul lui Kleene
Σ_{La}	logica afirmativă a lui Lorenzen
Σ_{Le}	logica efectivă a lui Lorenzen
Σ_{Li}	sistemul intuiționist al lui Łukasiewicz
Σ_{Ln}	logica cu negație a lui Lorenzen
Σ_{Lp}	sistemul parțial intuiționist al lui Łukasiewicz
Σ_{Lc}	sistemul de implicație și negație al lui Łukasiewicz
Σ_M	sistem de logică modală
Σ_{Me}	logica elementară a lui Moisil
Σ_{Msp}	logica strict particulară a lui Moisil
Σ_{Mspd}	logica strict pozitivă distributivă a lui Moisil
Σ_O	logica monovalentă a lui Onicescu
Σ_{S4}	sistemul lui Kripke
Σ_{Sm}	sistemul lui Schmidt
Σ_T	sistemul lui Troelstra
Σ_{Vr}	sistemul lui Vredenduin

ELEMENTS OF INTUITIONIST LOGIC

Summary

The starting point of this work is a brief presentation of the main intuitionist ideas, illustrated by plain examples from the intuitionist mathematics and concentrated in seven theses — essential for the understanding of the intuitionist conception about logic and indispensable for the effective construction of an intuitionist logic. These seven theses are :

I. The pure mathematics is an activity independent from language ;

II. The object of pure mathematics consists of the non-linguistic mathematical constructions ;

III. The object of the mathematical logic consists of the mathematic language which carries, more or less exactly, the mathematical constructions ;

IV. The effective mathematical existence always implies the logical non-contradiction ; but the non-contradiction does not always imply effective mathematical existence ;

V. The practise of a correct mathematics and a corresponding logic prevents the occurrence of paradoxes ;

VI. *Tertium non datur* and *duplex negatio* cannot be universally valid in a correct logic, nor could they be false ;

VII. Axiomatization cannot be accepted as a method for the construction of mathematical theories, but only as an auxiliary method for the description and systematization of pre-existent theories.

The second chapter (*The Formalizing of the Intuitionist Theses*) details the main attempts to construct an intuitionist logic. It shows that these attempts can be divided in two groups : one group surveys the formalizing of the first theses, and the other follows particularly the formalizing of thesis VI. The attempts in the first group take more on the intuitive line ; the others — on the formal axiomatic line. Special mention is made of A. Heyting's contribution, which tries to work alongside both directions. In spite of that, Heyting's system

has got into deficit. It does not entirely encompass the intuitionist theses, so — like the other axiomatic attempts in this direction — it ends up by becoming a mere formalist system, with no precise interpretation, which does no longer answer the intuitionist exigencies.

The author strives to prove the possibility of constructing an *intuitive* logical theory of the intuitionist mathematics which may befit the seven theses. This intuitive theory must *precede*, according to thesis VII, the evolvment of any formal system of the intuitionist logic, because it is not aimed at the construction of the intuitionist logic, but at the description and systematizing of an intuitive, preexistent, logical theory.

It begins with the Brouwerian theory of the mathematical stages, mainly treading on the construction of the *mathematical-linguistical parallelism*. The concepts of “mathematical construction” are specified (marked $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \dots$) as well as “the individual constants” (marked α_i , β_i , $\gamma_i \dots$) and “the propositional constants” (marked α , β , $\gamma \dots$). The constants are conceived as *shortenings* of the linguistical expressions, which denote either simple mathematical entities, as in the case of the individual constants, or operations with such entities, as in the case of the propositional constants.

As regards the propositional constants, it comes out that there are two ways, one *direct* and the other *indirect*, to obtain the mathematical-linguistical parallelism. The first one starts from the mathematical construction: $(A) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (\alpha)$; the second, from the propositional constant $(\alpha) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (A)$. It is by means of the two ways of getting the mathematical-linguistical parallelism that the essential distinction is being introduced between an *asserted* constant ($\mathcal{L}_s$) and an *attested* one ($\mathcal{L}_i$). The *asserted* constants are obtained by direct means:

$(A) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow (\mathcal{L}_s \alpha))$; the *attested* ones, by reverse means: $[(\alpha) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (A)] \rightarrow (\mathcal{L}_i \alpha)$.

By way of the reverse means of getting the mathematical-linguistical parallelism, the *intuitionist negation* is illustrated. According to Brouwer's, it takes the following form:

$$\begin{array}{ccc}
 (1) & (\alpha) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (-) & (\neg \alpha) \\
 & \downarrow & \downarrow \uparrow \\
 & (\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathcal{L}_s \beta) &
 \end{array}$$

It means that the starting point is a propositional constant (α) which shortens a linguistical expression ($\mathfrak{A}$), with no corresponding

mathematical construction (A), but which entails a construction (B) so that (β) — which shortens its linguistical expression $\mathfrak{B}$, contradicts (α) — marked by $(\neg \alpha)$. According to Heyting's, the negation takes the form :

$$(2) \quad [(\alpha \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (\emptyset))] \rightarrow (\neg \alpha)$$

in which $\emptyset$ indicates a hypothetical contradictory construction.

Mention is made of G.F.C. Griss' criticism of form (2) as lacking intuitionist consistency. Griss confines the acquiring of the mathematical-linguistical parallelism to the direct way of assertions, where no negation is liable to occur, under the presumption of the inexistence of contradictory hypothetical constructions ($\emptyset$).

The reverse way may also witness undecidable constants $(\alpha^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ, \dots)$ which shorten linguistical expressions; they have no correspondence, à la Brouwer, in either effective mathematical constructions, nor in constructions whose shortened expressions would contradict them; nor, à la Heyting, in contradictory hypothetical constructions.

Discussions about negation are mentioned. It could be intuitionistically justified on the basis of thesis III which postulates the *admission of linguistical errors*. Under this circumstance, erratic expressions could be obtained even directly. Generally speaking, owing to the fact that the mathematical language is not a sure method to express mathematical constructions, any linguistical expression must be *verified*, no matter the method of acquirement. During the verification process, the negation may appear. Mention is also made of the discussions regarding the undecidable constants and the question of their exclusion, as alien to the context of the mathematical-linguistical parallelism.

Another fundamental problem is connected with the intuitionist interpretation of the *propositional variables*. Since the "truths", after Brouwer, do not reside with the mathematical language, but with mathematics proper; and since the assertion, the attesting and the negation of the expressions could be justified with no help from the values of truth, the intuitionist propositional variables must be interpreted as *generalizations* of the propositional constants, either asserted or attested, when they are marked $\neg a, \neg b, \neg c, \dots$; or generalizations of the negated propositional constants, when they are marked $\neg \neg a, \neg \neg b, \neg \neg c, \dots$. Other variants are also mentioned, where negation is identified with falseness (Heyting), or excluded

as a negation in general (Griss), or as falseness (Octav Onicescu, *Logique à une seul valeur*, in *Principes de logique et de philosophie mathématique*, Bucarest, 1971). Anyway, no intuitionist propositional variable, irrespective of the variant of its interpretation, could further allow the value shuffles of the formalist propositional variable. If both p and $\sim p$ could be true or false, a and $\neg a$ generalize determined constants; a only generalizes asserted or attested constants (= true in certain variants), while $\neg a$ only generalizes negated constants (= false in certain variants). But all these induce an intuitionist re-interpretation of the *logical operations*, which could no longer be considered as functions of truth.

Details are offered on the intuitionist significances of the logical operations, with the variants and the difficulties that they entail. One paragraph, dedicated to the *general significance of the intuitive theory*, sets in principle the question of some tautologic formulae, derived from the special significance of the propositional variables — other than the usual ones; and the other way round — the lack of significance of the usual tautologies which cannot, though correct, take any place within the frame of the mathematical-linguistical parallelism.

The intuitive theory is completed by two paragraphs concerning the significance of the *predicative forms* and of the quantification. Disputed concepts are introduced, like the one of “property”, and one discusses the problem of a special negation ($\neg_p$) which should only affect the property and which should be distinct from the propositional negation ($\neg$). On the basis of these distinctions, the intuitionist restrictions in the logic of the predicates are unfolded.

The intuitionist theory of the formal systems is tackled, this time, in its relationship with the intuitive theory; the formal systems are regarded according to the degree in which they describe and systematize this theory. Heyting’s system is the starting point, due to its formalistic characteristics which allow various *interpretations* — quite interesting from the formalist point of view, but with no intuitionist significance. A review is made of the other intuitionist systems, with or without negation.

The intuitionist significance of Gödel’s demonstration brings forth the fact that any formal system which is adequate to the intuitive theory of the intuitionist logic must be of the positive type, in order to avoid all possible contradictions and to comply with thesis V. The conclusion is reached, nevertheless, that in this case, the logical perfection of a system, like Griss’, brings about a conside-

rable shrinkage of the intuitive theory. Such criteria divide the formal systems into *semi-intuitionist* and *intuitionist*.

The last part of the work (*The Logic of the Neointuitionist Formalism*) is dedicated to the systems bearing no connection with the intuitive theory of the intuitionist logic, hence to the intuitionist theses. Instead, the formalist-neointuitionist systems are connected to the formal intuitionist systems. If these last ones are regarded as partially isomorphous models with the intuitive theory of the intuitionist logic, then the formalist-neointuitionist systems are *models of these models*. In the formalist-neointuitionist systems which are the result of the intuitionists' tendency toward formalism and of the formalists' toward intuitionism, we lose, as a rule, the intuitionist significance of the variables and of the logical operations. Systems like those of Troelstra, Kreisel, Kleene, Schmidt, Lorenzen are rendered. The author also rendered here the tendency of some "intuitionists" who are not only concerned with the construction of the formalist-neointuitionist systems, but also apply them in a formalistic manner to the building of the intuitionist mathematics — which evidently contradicts the intuitionist theses and which has triggered, as a matter of fact, A. Heyting's opposition itself. It does not mean however, that no valuable results have been obtained, but it does mean that these results have no more connection with intuitionism.

In spite of this situation, the formalist-neointuitionist systems preserve, at the level of the most abstract generality, certain formal particularities of the intuitionist logic. They are linked with the *significance of negation* and the *logical principles*.

The negation can no longer be considered as a simple operator. It characterizes the *quality* of the formal system. Avoidance of the negation could ultimately offer the logical *perfection*, but it brings about, in P. Lorenzen's terminology, the lack of effectivity of the respective system. From the intuitionist point of view, this fact involves no disadvantage, for pure mathematics is independent from any language and requires no logical effectivity. Intuitionism is, from this point of view, entirely opposed to neopositivism which, in its extremist form, tends toward the logical construction of the whole world.

The logical principles, also, regain their formal importance. They could no longer be considered as simple tautologic formulae, alongside with any other. A certain differentiation among them is obvious; one group is made up of the principle of the identity and of

the non-contradiction; the other, of the principle of the excluded third and of the double negation. It is useful to consequently exclude the latter, in order to grant the former (the avoidance of the occurrence of paradoxes).

The *relativizing* of the logical principles is a formal consequence of the *dialectic* particularities of the intuitionist mathematics, which is perpetuated to the level of the formalist systems and having here the semblance of an entirely arbitrary character. Within a general theory of formal systems, the systems called "intuitionists" — in spite of their strict formalistic aspects — determine a grading of the systems (Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non chrysippiennes*, București, 1972), which involves in itself a dialectic note.

No matter the arbitrary, or more or less formalistic form, the intuitionist systems must be known to their utmost degree of abstraction, to their highest logico-mathematical stages and order, to use Brouwer's terminology, and implicitly — consciously or not, deliberately or not, in one form or another — the dialectic particularities of these systems must also be recognized.